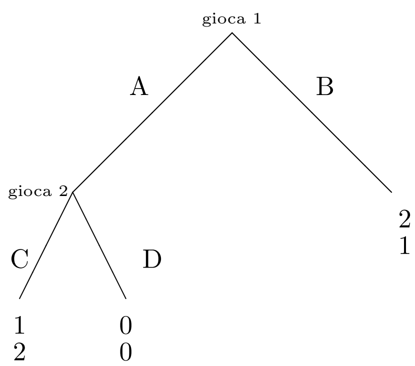
Dato il seguente gioco in forma estesa, descriverlo in forma strategica:



Calcolarne poi gli equilibri di Nash in strategie pure.

Soluzione

Strategie del giocatore I: A e B
Strategie del giocatore II: se A, C; se A, D

$I \backslash II$	C	D
A	$(1,2)$	$(0,0)$
B	$(2,1)$	$(2,1)$

N.B. Quando I gioca B, il gioco si conclude prima che II giochi la sua mossa.
Abbiamo due equilibri di Nash in strategie pure: (B,C) e (B,D) (si noti che solo (B,C), quello che si trova con l'induzione a ritroso, è perfetto nei sottogiochi).

Calcolare gli equilibri di Nash in strategie miste del seguente gioco:

I/II	t_1	t_2
s_1	1,2	2,1
s_2	3,1	1,3

Soluzione

In strategie pure non c'è equilibrio di Nash. Passo alle strategie miste e assegno distribuzione di probabilità sulle diverse mosse dei giocatori.

$$U_I(p,q) = 1(pq) + 3q(1-p) + 2p(1-q) + 1(1-p)(1-q)$$

$$U_{II}(p,q) = 2(pq) + 1q(1-p) + 1p(1-q) + 3(1-p)(1-q)$$

Fissato q, cerco la miglior risposta per I, cioè cerco, al variare di p, il max della funzione di utilità di I:
$U_I(p,q) = pq + 3q - 3pq + 2p - 2pq + 1 - q - p + pq = -3pq + 2q + p + 1 = (1-3q)p + 2q + 1$
Per q fissato, questa è l'equazione di una retta che considero nell'intervallo $[0,1]$ perché $0 \leq p \leq 1$.

$$\begin{array}{lll} \text{Se } 1-3q > 0, & \text{cioè } q < 1/3: & \text{max per } p = 1 \\ \text{Se } 1-3q < 0, & \text{cioè } q > 1/3: & \text{max per } p = 0 \\ \text{Se } 1-3q = 0, & \text{cioè } q = 1/3: & \text{max per ogni } p \end{array}$$

Fissato p, cerco la miglior risposta per II, cioè cerco al variare di q il max della funzione di utilità di II:
$U_{II}(p,q) = 2pq + q - pq + p - pq + 3 - 3q - 3p + 3pq = 3pq - 2q - 2p + 3 = (3p-2)q - 2p + 3.$

$$\begin{array}{lll} \text{Se } 3p-2 > 0, & \text{cioè } p > 2/3: & \text{max per } q = 1 \\ \text{Se } 3p-2 < 0, & \text{cioè } p < 2/3: & \text{max per } q = 0 \\ \text{Se } 3p-2 = 0, & \text{cioè } p = 2/3: & \text{max per ogni } q \end{array}$$

Disegnando nel piano cartesiano le curve di miglior risposta di I e di II, queste si incontrano in un solo punto $(2/3, 1/3)$ che corrisponde all'equilibrio di Nash in strategie miste. Questo significa che I gioca con $p = 2/3$ la strategia s_1 e con $p = 1/3$ gioca s_2. II gioca con $q = 1/3$ la sua strategia t_1 e con $q = 2/3$ gioca t_2.
Si ha, inoltre:

$$U_I(2/3, 1/3) = 5/3$$

$$U_{II}(2/3, 1/3) = 5/3$$

Calcolare l'equilibrio di Nash in strategie completamente miste del seguente gioco (di Aumann) in forma strategica:

$I \backslash II$	L	R
T	$(6,6)$	$(2,7)$
B	$(7,2)$	$(0,0)$

Per quanto riguarda le strategie miste, usiamo come di solito $p, 1-p$ e $q, 1-q$ per indicare le strategie miste rispettivamente di I e II.
Il payoff atteso di I è:

$$f(p,q) = 6pq + 2p(1-q) + 7(1-p)q = 6pq + 2p - 2pq + 7q - 7pq =$$

$$= -3pq + 2p + 7q = p(2-3q) + 7q$$

Quindi per $q < 2/3$ la best reply per I è $p = 1$, per $q = 2/3$ è tutto $[0,1]$, per $q > 2/3$ la best reply è $p = 0$.
Per II il payoff atteso è:

$$g(p,q) = 6pq + 7p(1-q) + 2(1-p)q = 6pq + 7p + -7pq + 2q - 2pq =$$

$$= -3pq + 2q + 7p = q(2-3p) + 7p$$

Quindi per $p < 2/3$ la best reply per II è $q = 1$, per $p = 2/3$ è tutto $[0,1]$, per $p > 2/3$ la best reply è $q = 0$.

In figura 1 disegniamo le best reply.

Le best reply ci permettono di individuare gli equilibri di Nash in strategie miste. Ritroviamo i due equilibri puri ed uno in strategie completamente miste (il cui payoff atteso è di 14/3 per entrambi i giocatori).

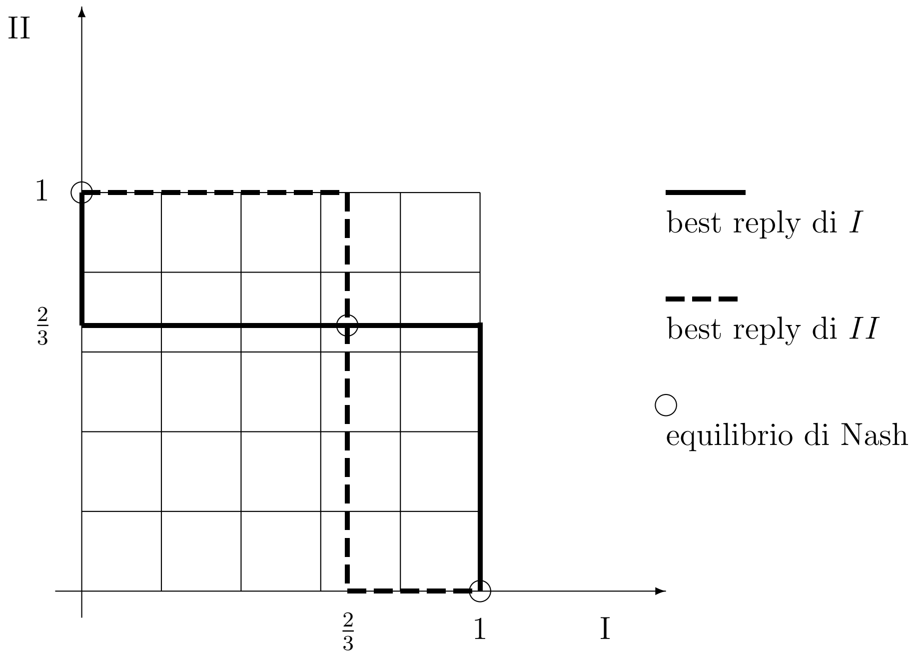


Figura 1: I grafici delle corrispondenze di miglior risposta