1 Un semplice problema di meccanica

Problema
Ho un cannone, col quale devo colpire un obiettivo a $500m$ di distanza. Sono in pianura e l'obiettivo è allo stesso livello del cannone. Sapendo che il proiettile parte con una velocità di $50\frac{m}{s}$, quale deve essere l'"alzo" (cioè l'angolo che il cannone forma con l'orizzontale) per ottenere il risultato desiderato? Si trascuri la resistenza dell'aria.

Soluzione
La massa del proiettile è rilevante? Supponiamo $m = 1$ per semplicità.

Facciamo due calcoli ovvi.

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} \cdot t \\ \\ y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Mettiamoci pure nell'origine ($x_0 = y_0 = 0$) e indichiamo con θ l'alzo e con v la velocità in modulo. Allora:

$$\begin{cases} x = v \cos\theta t \\ \\ y = v \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Da cui

$$\begin{cases} t = \frac{x}{v\cos\theta} \\ \\ y = v \sin\theta \frac{x}{v\cos\theta} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v^2\cos^2\theta} \end{cases}$$

La seconda equazione può essere riscritta come

$$y = (\tan\theta) \cdot x - \frac{g}{2v^2\cos^2\theta} x^2$$

E quindi:

$$
\begin{aligned}
y = 0 \quad &\iff \quad x[\tan\theta - \frac{g}{2v^2\cos^2\theta}\cdot x] = 0 & \iff \\
&\iff \quad x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{2v^2\cos^2\theta}{g} & \iff \\
&\iff \quad x = 0 \quad \vee \quad x = (2\sin\theta\cos\theta)\frac{v^2}{g} & \iff \\
&\iff \quad x = 0 \quad \vee \quad x = (\sin 2\theta)\frac{v^2}{g}
\end{aligned}
$$

Naturalmente $x = 0$ non ci interessa (è da dove il proiettile parte!).
Per trovare la soluzione, è sufficiente trovare θ tale che $500 = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$.
La soluzione naturalmente sarà:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2}\arcsin(\frac{500g}{v^2})$$

Corretto?

Abbiamo trovato la posizione di impatto a terra del proiettile in funzione di θ:

$$x(\theta) = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$$

Quale è la distanza massima cui può giungere il proiettile? È noto da tipici esercizi di Fisica I che la massima distanza si raggiunge per $\theta = \frac{\pi}{2}$, tuttavia ci vuole poco a verificare questo fatto.
Cerchiamo la $x(\theta)$ massima, trovando dove $\frac{dx(\theta)}{d\theta} = 0$.

Ci sono altre soluzioni,
ma ovviamente non ci interessano

$$\frac{dx(\theta)}{d\theta} = \frac{2v^2}{g}\cos 2\theta = 0 \iff \cos 2\theta = 0 \iff 2\theta = \frac{\pi}{2} \iff \theta = \frac{pi}{4}$$

Da cui $x_{max} = \frac{v^2}{g}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{v^2}{g}$.

Si noti che se $v = 50\frac{m}{s}$, allora $v^2 = 2500\frac{m^2}{s^2}$. Ovviamente $g \simeq 9.81\frac{m^2}{s^2}$. Quindi $\frac{v^2}{g} \simeq \frac{2500}{9.81}m \simeq 250m$.

E quindi, tornando al problema di partenza:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2}\arcsin(500 \cdot \frac{g}{v^2}) \simeq \frac{1}{2}\arcsin(\frac{500}{250}) \simeq \frac{1}{2}\arcsin 2$$

Ma $\arcsin 2$ non esiste!

Commentare!