16 Integrali primi ed orbite

Consideriamo un *sistema* di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine in forma normale. Per semplicitá considereremo un sistema di 2 equazioni e 2 incognite, anziché il caso generale $n \times n$.
Una ulteriore *semplificazione* consiste nel fatto che consideremo sistemi *autonomi*. Cioé, invece del caso piú generale: $\begin{cases} \dot{x} &= f(t,x,y) \\ \dot{y} &= g(t,x,y) \end{cases}$ Consideremo $\begin{cases} \dot{x} &= f(x,y) \\ \dot{y} &= g(x,y) \end{cases}$ Vale a dire, da un punto di vista modellistico, ci occuperemo di sistemi dinamici (per esempio) per i quali la dinamica non varia nel tempo. Tanto per fare un esempio stupido: rientra in questo il modello della caduta di un grave (con o senza attrito) in un campo gravitazionale *che non dipende dal tempo*. Se invece cambia con l'andar del tempo (es. dentro una navicella spaziale sottoposta ad accelerazioni variabili), siamo fuori del caso di modellizzazione con un sistema autonomo. Se g cambia col variare della pressione (es. vogliamo calcolare la traiettoria di un missile intercontinentale), il sistema é ancora autonomo.
Premettiamo un teorema di esistenza ed unicitá della soluzione di un problema di Cauchy, che estende ai sistemi quello che giá avevamo considerato per le equazioni.

Teorema 16.1 *Sia dato* $\begin{cases} \dot{x} &= f(t,x,y) \\ \dot{y} &= g(t,x,y) \end{cases}$ *, dove $f, g : A \to \mathbb{R}$, essendo A un aperto di $\mathbb{R}^3$ ed $f, g \in \mathcal{C}^1(A)$ asegnata la c.i. $(t_0, x_0, y_0) \in A$, esiste una ed una sola soluzione massimale del problema di Cauchy.*

Osservazione 16.1 Soluzione di $\begin{cases} \dot{x} &= f(t,x,y) \\ \dot{y} &= g(t,x,y) \end{cases}$ é una *coppia di funzioni* $\xi, \eta : I \to \mathbb{R}$, t.c. $\begin{cases} \dot{\xi(t)} &= f\Big(t, \xi(t), \eta(t)\Big) \\ \dot{\eta(t)} &= g\Big(t, \xi(t), \eta(t)\Big) \end{cases}$ per ogni $t \in I$.
In particolare poi, se $\xi(t_0) = x_0$ ed $\eta(t_0) = y_0$, avremo che *la coppia di funzioni* (ξ, η) é soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} &= f(t,x,y) \\ \dot{y} &= g(t,x,y) \\ x(t_0) &= x_0 \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$ ■

Osservazione 16.2 A noi, come detto interesserá un sistema *autonomo*: $\begin{cases} \dot{x} &= f(x,y) \\ \dot{y} &= g(x,y) \end{cases}$ In questo caso avremo $f, g : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e sará sufficiente assumere $f, g \in \mathcal{C}^1(A)$ ed (A aperto) oltre che $(x_0, y_0) \in A$ per garantire che il pb di Cauchy ha una ed una sola soluzione massimale. ■

Osservazione 16.3 I sistemi di equazioni differenziali sono importanti anche perché ad essi si possono ridurre le equazioni differenziali di ordine superiore al primo. Vediamo un esempio: se abbiamo $\ddot{z} = h(t, z, \dot{z})$, basta considerare $x = z, y = \dot{z}$ ed otteniamo il sistema: $\begin{cases} \dot{x} & = y \\ \dot{y} & = h(t, x, y) \end{cases}$ che é un sistema *del primo ordine* di 2 equazioni e 2 incognite. Dove $f(t, x, y,) = y$ e $g(t, x, y) = h(t, x, y)$. Va da sé che, per garantire esistenza ed unicitá della soluzione massimale per un problema di Cauchy quale

$$\begin{cases} \ddot{z} & = h(t, z, \dot{z}) \\ z(t_0) & = z_0 \\ \dot{z}(t_0) & = z_1 \end{cases}$$

sará essenziale la regolaritá della funzione h. ■

Esercizio 16.1 Scrivere la versione del teorema 16.1 per un problema di Cauchy per un'equazione differenziale del secondo ordine. ■

Esercizio 16.2 Scrivere la piú generale equazione differenziale di ordine n e trasformarla in un sistema del primo ordine. ■

Esercizio 16.3 Si consideri $\begin{cases} \ddot{v} & = v + \ddot{w} \\ \ddot{w} & = vw \end{cases}$ Trasformarlo in un sistema *del primo ordine* ■

D'ora in poi, come detto, considereremo solo sistemi 2×2 autonomi

$$\begin{cases} \dot{x} & = f(x, y) \\ \dot{y} & = g(x, y) \end{cases} \tag{2}$$

Con $f, g \in \mathcal{C}^1(A)$, A aperto di $\mathbb{R}^2$

Definizione 16.1 *Sia (ξ, η) una soluzione massimale di (2). Sia I l'intervallo* [1]*sul quale é definita. Cioé sia $\xi, \eta : I \to \mathbb{R}$. La sua traiettoria ("nello spazio*

[1] N.B. parlando di soluzione di un (sistema) di equazioni differenziali e non di un problema di Cauchy, non saremmo "obbligati" a considerarla su un intervallo. Qui imponiamo *per comoditá* questa restrizione

delle fasi"), e cioé

$$\{(x,y) \in A : \exists t \in I t.c. (x,y) = \Big(\xi(t), \eta(t)\Big)\}$$

viene detta orbita

Lo "spazio delle fasi" non é altro che un $\mathbb{R}^2$.
Il nome viene spesso usato e deriva dalla riduzione di un'equazione di secondo ordine ad un sistema.
Grazie all'ipotesi di regolaritá che abbiamo fatto su f e g, possiamo garantire che, date 2 orbite, generate da due soluzioni massimali, si possono presentare solo due casi:

- le due orbite non si intersecano mai

- le due orbite coincidono

Infatti, se le due orbite si intersecano vale a dire se hanno un punto in comune $(\overline{x}, \overline{y})$ vuole dire che

$$\exists t_1 \in I_1, t_2 \in I_2 \text{t.c.} (\overline{x}, \overline{y}) = \Big(\xi_1(t_1), \eta_1(t_1)\Big) = \Big(\xi_2(t_2), \eta_2(t_2)\Big)$$

Dove $\xi_1, \eta_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ é la soluzione massimale che genera la prima orbita O_1 e $\xi_2, \eta_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ é quella che genera l'altra orbita O_2. É immediato verificare che $\widetilde{\xi_1}(t) = \xi_1(t - t_1)$ e $\widetilde{\xi_2}(t) = \xi_2(t - t_2)$
(Analogamente [2] per $\eta \cdots$) ci danno due soluzioni massimali dello stesso problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} & = f(x,y) \\ \dot{y} & = g(x,y) \\ x(0) & = \overline{x} \\ y(0) & = \overline{y} \end{cases}$$

E allora devono coincidere. Morale: ξ_1 e ξ_2 non sono altro che l'una la "traslata" dell'altra (idem per η, vedi anche in questo caso la nota 2). E quindi le orbite O_1, O_2 coincidono per intero.
Quindi le orbite ci danno una *partizione* di A (che le orbite "riempiano tutto" A é conseguenza del teorma di *esistenza* ed [unicitá]).

Occupiamoci ora di un altro problema, che ha qualche somiglianza col precedente, ma che riguarda *una* sola orbita. Sia allora O un'orbita. E sia (ξ, η) una soluzione massimale che le genera. Anche qui possiamo distinguere tra due casi:

[2] Si noti: ξ_1 e η_1 le "trasliamo" della *stessa* quantitá t_1. E cosí ξ_2 e η_2 sono entrambe "traslate" dello stesso t_2

- per ogni $(x,y) \in O$ esiste [3] ed é *unico* $t \in I$ t.c.$\Big(\xi(t)\eta(t)\Big) = (x,y)$

- esiste $(x,y) \in O$ t.c. vi sono almeno *due* $t_1, t_2 (t_1 \neq t_2)$ t.c. $\Big(\xi(t_1), \eta(t_1)\Big) = \Big(\xi(t_2), \eta(t_2)\Big) = (x,y)$

Questo secondo caso puó verificarsi in due occasioni. Una é che le funzioni ξ ed η siano costanti. Altrimenti, si puó dimostrare che ξ ed ηsono periodiche con lo stesso periodo $T > 0$).

É abbastanza evidente che conoscere le orbite di un sistema dinamico é interessante. E vedremo in seguito altre ragioni di interesse. Chiediamoci allora se c'é un modo per trovarle, senza dover passare attraverso la soluzione del sistema di equazioni differenziali dato.
Prima di vedere come sia possibile farlo, sará opportuno riflettere sul *perché* ci possiamo aspettare che sia possibile in qualche modo trovare le orbite senza avere la descrizione completa del moto. Cé almeno un'ovvia considerazione: conoscere un'orbita vuol dire (almeno "a prima vista") conoscere qualcosa di meno della legge del moto. E, quindi, non é cosí strano che ci si possa arrivare con una "scorciatoia".
Per affrontare il problema, osserviamo che un'orbita dovrebbe essere ragionevolmente una linea nel piano xy. Supponiamo che essa possa essere descritta (implicitamente, come si usa dire) come $v(x,y) = c$. Dove $c \in \mathbb{R}$, mentre $v \in \mathcal{C}^1(A)$. Cioé come "una curva di livello". Per definizione di orbita, sará $v\Big(\xi(t), \eta(t)\Big) = c \; \forall t \in I$ se(ξ, η) é una delle soluzioni dell'equazione differenziale che genera l'orbita in questione.

$$\begin{aligned} \text{Allora} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \dot{\xi(t)} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \dot{\eta(t)} &= 0 \quad \forall t \in I \quad \text{Cioé:} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \cdot f\Big(\xi(t), \eta(t)\Big) + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot g\Big(\xi(t), \eta(t)\Big) &= 0 \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

Da ció ricaviamo la speranza che

$$\frac{\partial v}{\partial x} f(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y} g(x,y) = 0 \tag{3}$$

possa essere un'equazione che ci permetta di trovare la v e quindi l'orbita.
Si noti che (3) é una equazione alle derivate parziali (lineare del primo ordine, nell'incognita v). Possiamo peró ridurci, almeno *localmente*, ad una equazione differenziale ordinaria. Nel modo che ora vediamo.
Supponiamo che sia $\nabla v \neq 0$ su tutto A. Allora, per il Teorema di Dini sulle

[3] ovviamente!!!

funzioni implicite , la relazione $v(x,y)=c$ puó essere localmente esplicitata . Vale a dire, [4]dato un punto (x,y) t.c. $v(x,y)=c$ esiste $\omega : H \to \mathbb{R}$, dove H é un opportuno intervallo di (x,y), t.c.

$$v\big((x,\omega(x)\big)=c \qquad \forall x \in H$$

Non solo, ma $\frac{d\omega}{dx} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}}$
Allora, la (3) puó essere riscritta cosí:

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}.$$

Vale a dire, almeno localmente la (3) si trasforma nell'equazione differenziale

$$y' = h(x,y) \qquad (\text{dove} \qquad h(x,y) = \frac{g(x,y)}{f(x,y)})$$

Si badi bene che non abbiamo *dimostrato* che le orbite si trovano risolvendo l'equazione differenziale $y' = h(x,y)$.
In effetti, questa ci permette solo di trovare in ogni caso al piú "pezzi" di orbite. Ma se siamo fortunati...
Occupiamoci ora dell'altro tema: "integrali primi".
Dato il sistema (2) diciamo *integrale primo* per (2) una funzione non costante $u : A \to \mathbb{R} \qquad \big(u \in \mathcal{C}^1(A)\big)$,t.c.$u\big(\xi(t),\eta(t)\big)$ sia *costante* per $t \in I$ (essendo $\xi,\eta : I \to \mathbb{R}$, soluzione di (2).

É evidente il legame esistente con le orbite, per quanto abbiamo appena visto. In effetti, se u é un integrale primo per (2), allora le sue curve di livello descrivono *orbite* di (2).

Cé un aspetto importante a proposito degli integrali primi, sul quale non possiamo soffermarci, ma che vale la pena di citare. (Per una trattazione adeguata, vedasi il libro di Pontryagin indicato in bibliografia. Chiediamoci *quanti* integrali integrali primi possa avere un sistema . Ovviamente la domanda va fatta "cum grano salis".
É ovvio che se u é un integrale primo lo sono anche per esempio $u+1, \quad 2u-4, \quad exp(u)$. Ma é altrettanto ovvio che non ci danno alcuna informazione aggiuntiva [5] oltre a quelle che ci fornisce giá u.
In effetti si puó dimostrere che (sotto condizioni ragionevoli) un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine in n incognite ha al massimo $n-1$ integrali primi "funzionalmente indipendenti". [6]Quindi, in particolare, per

[4]supponendo sia esplicitabile rispetto alla y. Se lo é rispetto ad x, basta rovesciare il ruolo delle variabili

[5]se cosí non fosse, dovremmo ammutolire per lo stupore

[6]vedasi Pontryagin per chi volesse sapere cosa sinifica esattamente

il sistema (2) é inutile cercarne piú di uno.
Si noti che ció si applica anche alle equazioni di ordine superiore al primo (come abbiamo visto, si possono trasformare in sistemi del primo ordine). In particolare, un'equazione differenziale del secondo ordine avrebbe un integrale primo.

Visto che l'equazione fondamentale della dinamica ($F = ma$) é appunto un'equazione del secondo ordine e visto che un integrale primo u descrive (per definizione!) qualcosa *che si conserva* lungo tutto il movimento, sarebbe il caso di chiedersi se questo integrale primo non abbia a che fare con qualche pomposo"principio di conservazione" . Cosí é infatti. Lo vedremo con due esempi in casi particolari: caduta di un grave e movimento di una molla.

Esempio 16.

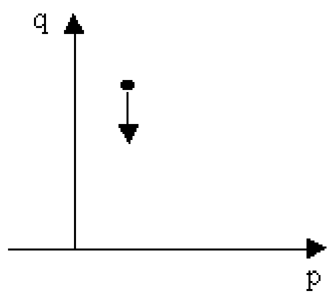

Figura 16.1

$\ddot{q} = -g$. Trasformo in un sistema $\begin{cases} \dot{x} & = y \\ \dot{y} & = -g \end{cases}$ Diciamo che il piano xy é il piano delle fasi. Sará per caso vero che $u(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + gx$ é un integrale primo? Si noti che u é l'energia totale (cinetica + potenziale che, per l'appunto é noto che si "conserva".
Soluzione del sistema é

$$\xi(t) = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \ , \ \eta(t) = v_0 - gt$$

$$u\big(\xi(t), \eta(t)\big) = \frac{1}{2}[v_0 - gt]^2 + s_0 g + v_0 g t - \frac{1}{2}g^2 t^2 = \frac{1}{2}v_0^2 + s_0 g$$

Sí é vero. La funzione u é *costante* su $\big(\xi(t), \eta(t)\big)$. Quindi é un integrale primo. E allora le orbite (o traiettorie del moto) sono date da $u(x, y) = c$ Cioé $frac12y^2 + gx = c$.
Ovverossia $x = -\frac{1}{2g} + \frac{c}{g}$

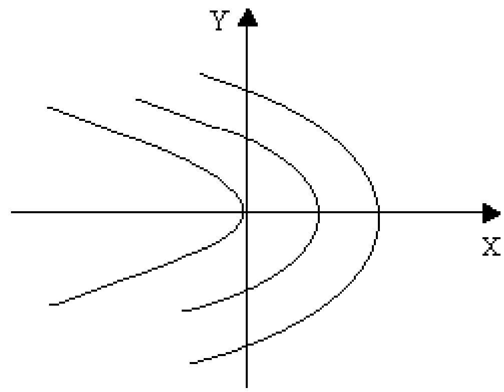

Figura 16.2

■

Naturalmente, conoscendo un integrale primo (ovverosia, le orbite) possiamo dire varie cose sul moto. Deducendole direttamente da loro, senza passare attraverso la soluzione esplicita del sistema (in questo caso la conosciamo, ma questo caso semplice ci é utile per capire "come si fa"). Ad esempio posso osservare che (fissato c) l'equazione $\overline{x} = -\frac{1}{2g}y^2 + \frac{c}{g}$ ha due soluzioni: $y = \pm\sqrt{2(c - g\overline{x})}$. Vale a dire in valore assoluto la velocitá con la quale il grave passa per una data posizione $\overline{x}$ é la stessa. Sia nel caso in cui "va su", sia se "va giú".

Oppure, fissato (x_0, y_0) (che posso pensare come condizioni iniziali del moto) posso garantire che oltre un certa posizione non potrá andare. Anzi, posso dire quale sará la posizione (x_M) massima che raggiungerá. Basta trovare l'ascissa del vertice della parabola che passa per (x_0, y_0) fra tutte quelle delle famiglia $x = -\frac{1}{2g}y^2 + \frac{c}{g}$.
Possiamo, per concludere, vedere se riusciamo a trovare le orbite [7] usando il metodo descritto in precedenza.
L'equazione differenziale da risolvere é $y' = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$.
Cioé $y' = \frac{-g}{y}$. Che é a variabili separabili e che si risolve facilmente, dandoci

[7]Sappiamo giá quali sono. Ma solo perché graziosamente qualcuno ha "suggerito" che potesse essere un integrale primo. Non sempre avremo il suggeritore a nostra disposizione.

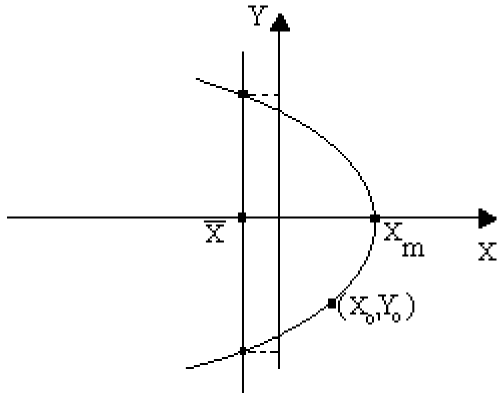

Figura 16.3

$\frac{1}{2}y^2 = -gx + c$.
Si noti, per concludere, che avendo un sistema 2×2 questo possiede essenzialmente un solo integrale primo.

Esercizio 16.4 Si consideri il moto di una molla che "ubbidisce" alla Legge di Hooke. Cioé $\ddot{p} = -kp$. Scrivere il sistema di primo ordine associato a questa equazione e trovarne le orbite ed un integrale primo. Che figura sono geometricamente le orbite?
Corrispondono all'intuizione che abbiamo sul moto di una molla? ■

Esempio 16.2 Consideriamo il seguente sistema 3×3:

$$\begin{cases} \dot{x} &= k_1 yz - k_2 x \\ \dot{y} &= k_2 x - k_1 yz \\ \dot{z} &= k_2 x - k_1 yz \end{cases}$$

Sia $\big(\xi(t), \eta(t)\zeta(t)\big)$ una soluzione.
Sottaendo membro a membro la seconda e la terza equazione otteniamo che $\dot{\eta(t)} - \dot{\zeta(t)} = 0$. Da cui $\eta(t) - \zeta(t) = cost$. Quindi $u(x, y, z) = y - z$ é un integrale primo. Questo fatto ci permette di ridurre il sistema ad uno "2×2".
Infatti , $y - z$ sará costante. Quindi possiamo sostituire a z $y - c$ (dove c é una costante). Otteniamo:

$$\begin{cases} \dot{x} &= k_1 y(y - d) - k_2 x \\ \dot{y} &= k_2 x - k_1 y(y - d) \end{cases}$$

Stavolta, sommando membro a membro otteniamo $\dot{\xi(t)} + \dot{\eta(t)} = 0$. Quindi $v(x, y, z) = x + y$ é un altro integrale primo. Altri non é il caso di cercarne.

■

Problema 16.1 *Interpretare il sistema precedente come modello per una* reazione chimica reversibile*. In particolare, interpretare x, y, z, le costanti k_1, k_2 nonché indicare quale (o quali) principio di consevazione sia legato agli integrali primi che abbiamo trovato.*

Esempio 16.3 Consideriamo un semplice modello di dinamica di due popolazioni interagenti

$$\begin{cases} \dot{x} & = (a - by)x \\ \dot{y} & = (c - dx)y \end{cases}$$

Per trovare le orbite e gli integrali primi dobbiamo risolvere $y' = \frac{(c-dx)y}{(a-by)x}$. Questa é un'equazione a variabili separabili che ci dá la soluzione della equazione differenziale in forma implicita:

$$\begin{aligned} a\ log\ y - by &= c\ log\ x - dx + k \quad \text{Ma allora} \\ u(x,y) &= d(x - c\ log\ x) + (a\ log\ y - by) \quad \text{é un integrale primo} \end{aligned}$$

Che interpretazione ne possiamo dare ? D'Ancona (capitolo 17) parla di "quantitá di vita della popolazione", di "energia demografica attuale" ed "energia demografica potenziale". Ma non si applicano a questa u

■