Capitolo 5

Giochi ripetuti

Dopo avere visto i modelli e le problematiche di base della TdG più classica, e prima di passare ad affrontare ulteriori tematiche, dedico questo breve capitolo ad una classe molto particolare di giochi, che possono essere visti come casi specialissimi di giochi in forma estesa. Nonostante ciò, questa classe di giochi merita l'attenzione che ha tradizionalmente ricevuto nella TdG, in quanto il suo studio ha l'ambizione di rispondere ad una domanda importante: cosa avviene quando dei giocatori si ritrovano più volte di seguito a giocare "lo stesso gioco"?

E' evidente che esistono casi in cui una situazione di interazione strategica viene ripetuta più volte: un gruppo di impiegati ed il capufficio intrattengono relazioni, alcuni aspetti delle quali si ripropongono ad ogni giornata di lavoro; in molti settori merceologici il negoziante ha di fronte a sé una clientela non molto variabile; nelle relazioni internazionali occorre ricordare che gli Stati di solito non hanno una breve durata; etc.

Le situazioni di interazione difficilmente si ripetono inalterate. Ma, come al solito, è opportuno che l'analisi parta dal caso più semplice: quello in cui un prefissato gruppo di giocatori si ritrova a giocare sempre lo stesso gioco, che usualmente viene detto "gioco costituente". Esattamente questi sono i giochi ripetuti.

Una delle ragioni più importanti che spingono a studiare i giochi ripetuti ha a che fare col sorgere "spontaneo" della cooperazione (e anche di convenzioni) in un contesto che definiamo tecnicamente "non cooperativo", cioè in assenza di istituzioni che possano garantire il rispetto di patti eventualmente sottoscritti fra le parti. Vi è un'intuizione diffusa che taluni comportamenti apparentemente non egoistici appaiano tali solo ad uno sguardo superficiale, mentre possono essere ricondotti al perseguimento del proprio "particulare", semplicemente collocandosi in un'ottica di lungo periodo e di interazioni ripetute. Non credo vi sia bisogno di spendere troppe parole per convincere il lettore della rilevanza, anche filosofica, di questo tipo di problematiche (si pensi alle domande: cos'è la morale? quale è l'origine delle leggi? cosa giustifica le cure parentali?). Il contributo disciplinare della teoria dei giochi a questa problematica consiste nel costruire ed analizzare modelli che permettano di comprendere come la cooperazione possa sorgere e fin dove possa spingersi in un contesto, appunto, non cooperativo. Si può citare a questo proposito, dal punto di vista economico, un fenomeno rilevante, costituito dal formarsi di "cartelli" di imprese in un mercato oligopolistico. La possibilità che questi si possano reggere senza avere bisogno di "patti scritti" rende più difficile, più problematica, l'azione delle autorità anti-trust.

Coerentemente con l'impostazione di questo libro, non mi avventurerò in un'analisi formale e generale dei giochi ripetuti, ma cercherò di illustrare, tramite alcuni esempi sviluppati in un contesto relativamente semplice, alcune delle principali intuizioni che emergono dal loro studio. Osservo esplicitamente che l'analisi sarà svolta interamente all'interno della TdG classica: non sarà quindi dato spazio a fenomeni ascrivibili a razionalità "limitata" dei giocatori, od al fatto che essi hanno a disposizione una conoscenza incompleta dei parametri del gioco.

Io mi limiterò ad analizzare il caso in cui il gioco costituente sia finito. Per quanto riguarda, invece, il numero di ripetizioni[1], vedrò i due casi più importanti: il caso in cui queste siano in numero finito e quello in cui siano invece in numero infinito. Quando si parla di gioco finito, occorre precisare se la durata del gioco è prefissata e se ciò è conoscenza comune fra i giocatori[2] . Io assumerò entrambe queste condizioni. Altri casi intermedi sono indubbiamente interessanti: in particolare, quando ad ogni "manche" vi è una probabilità positiva che il gioco termini a quel punto. Anche se vedremo un caso di questo genere, l'analisi sarà comunque concentrata sui due casi polari sopra detti, perché già da questi, e dal loro raffronto, vengono insegnamenti interessanti (ed anche i più noti).

Comincio esaminando il "caso finito": descriverò con un po' di dettaglio quello che avviene nel caso più semplice, quello in cui un gioco sia ripetuto due volte, e mi affiderò all'intuizione del lettore nel caso generale.

Per fissare le idee, considererò la ripetizione di un "gioco costituente" particolare: il dilemma del prigioniero. Mi riferisco al gioco:

$I \backslash II$	L	R
T	$(2,2)$	$(0,3)$
B	$(3,0)$	$(1,1)$

Quale possa essere la forma estesa del gioco ripetuto (due volte) non dovrebbe costituire una sorpresa. Essa è rappresentata nella figura 1.1.

Si noti un fatto importante: se si presta attenzione agli insiemi di informazione dei giocatori, si comprende come si sia assunto che ogni giocatore possa *osservare*

[1] Al solito, restrizioni importanti nell'analisi rischiano di passare sotto silenzio. Noto che io considererò solo il caso in cui si abbia ripetizione della interazione a istanti temporali "discreti" e prefissati.

[2] Penso sia opportuno non sottovalutare queste precisazioni: d'altronde, non è difficile rendersi conto, anche a livello intuitivo, di quanto possano essere rilevanti.

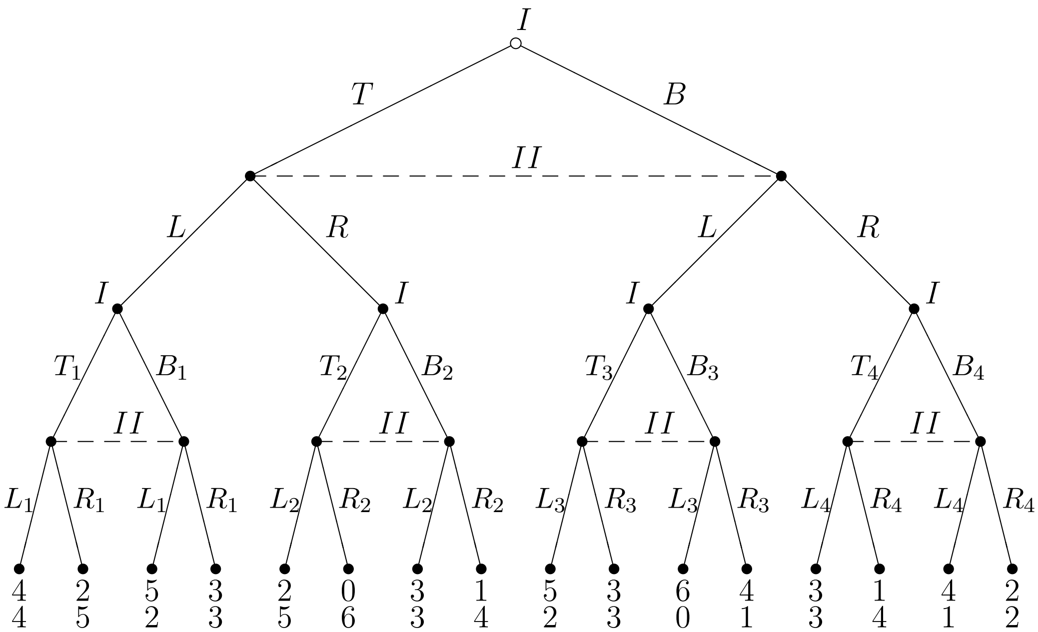

Figura 5.1: Il dilemma del prigioniero ripetuto due volte: forma estesa

tutte le scelte effettuate da parte di tutti i giocatori nel turno precedente. Siamo quindi di fronte al caso in cui le possibilità di osservazione sono massime (altro caso potrebbe essere quello in cui i giocatori osservano tutti gli *esiti* avutisi in precedenza, oltre naturalmente a varie possibili misture di questi due casi o di analoghi in cui vi siano possibilità di osservazione parziali).

Altro fatto importante: ho dato per scontato che i payoff finali si ottengano semplicemente sommando i payoff ottenuti nei due stadi. E' una scelta possibile, ma se fra i due stadi intercorre un certo intervallo di tempo, ci potremmo forse aspettare che compaia un "fattore di sconto". Tornerò in seguito su questo tipo di problematiche. Per ora, continuiamo l'analisi assumendo che i payoff siano la somma dei payoff parziali o, se mi farà comodo, che siano i payoff medi: se i payoff rappresentano valori di funzioni di utilità di vNM, non fa nessuna differenza.

Ho anche rappresentato, nella tabella 1.1, la forma strategica di questo gioco per rendere l'idea, anche a livello di immediatezza visiva, di quanto diventi rapidamente grande il numero di strategie a disposizione dei giocatori in un gioco ripetuto. Con soli due stadi, e partendo da un gioco costituente nel quale ogni giocatore ha solo due strategie, abbiamo già $2^5 = 32$ strategie per ciascuno dei giocatori. Con tre stadi il loro numero diventa 2^{21}, cioè circa un milione, con quattro stadi diventano $2 \cdot 2^4 \cdot 2^{16} \cdot 2^{64} = 2^{85}$, etc.

Acquisita la consapevolezza di quanto sia grande il numero di strategie a disposizione, oltre che preoccuparsi per la presumibile difficoltà d'analisi, si può osservare che:

- questo numero di strategie così grande permette di codificare strategie anche molto complesse, che prevedono scelte diverse a seconda delle diverse storie pregresse (e quindi acquistano senso termini quali ritorsione, riappacificamento, strategie imitative, etc.)

- d'altra parte, anche se gli spazi di strategie sono grandi, sono comunque molto strutturati e sono costruiti a partire da un ridotto numero di elementi "primitivi"

Avendo a disposizione la forma strategica, visto che con due stadi il gioco è ancora maneggevole, è immediato trovare gli equilibri di Nash in stretegie pure. Gli equilibri di Nash (evidenziati con bordature nella tabella 1.1) sono 16, dei quali solo uno è perfetto nei sottogiochi (quello nell'angolo in basso a destra, evidenziato con una doppia bordatura). Si noti che tutti danno lo stesso payoff ai giocatori, e questo payoff è in particolare identico a quello dell'unico equilibrio perfetto nei sottogiochi. Le strategie che individuano quest'ultimo corrispondono al fatto che entrambi i giocatori giochino ogni volta la strategia di equilibrio del gioco costituente.

Abbiamo osservato come il payoff degli equilibri di Nash sia lo stesso di quello dell'equilibrio perfetto nei sottogiochi. Ciò non è affatto casuale, ma deriva dal fatto che le azioni che i giocatori si trovano effettivamente a compiere ad ogni stadio corrispondono a strategie di equilibrio. Si consideri ad esempio l'equilibrio $(BT_1T_2B_3B_4, RL_1R_2L_3R_4)$. Esso prevede che i giocatori scelgano rispettivamente B ed R al primo stadio. Dopodiché, quando devono giocare il secondo stadio si trovano nel nodo più a destra dell'albero ed anche qui è previsto dall'equilibrio che scelgano le strategie di equilibrio del gioco costituente. Le altre azioni previste per il secondo stadio, che in nessun caso danno luogo ad un equilibrio per il gioco costituente, non verranno mai messe effettivamente all'opera. Insomma, un osservatore esterno vedrebbe i giocatori *sempre* giocare l'equilibrio di Nash del gioco costituente. Questo tipo di osservazione si estende immediatamente al caso in cui il dilemma del prigioniero si ripeta un numero finito K di volte, qualunque sia il numero intero K scelto.

Ci si può porre la domanda se tutto ciò non sia vero in generale per i giochi finitamente ripetuti. La risposta è che vi è più varietà di quanto non lasci presagire questo esempio così particolare. In effetti, se quanto avviene nel dilemma del prigioniero fosse il caso generale, questo libro non conterrebbe un capitolo dedicato ai giochi ripetuti.

Il fatto è che il dilemma del prigioniero ha una proprietà *molto* particolare: il payoff di equilibrio è uguale al valore di *min max*[3] per ciascuno dei due giocatori. Questo fatto impedisce di "punire" un giocatore che non aderisca ad una strategia "collaborativa". Vediamo di capire il significato di questa affermazione considerando cosa avviene[4] nel caso in cui vi sia un unico equilibrio di Nash il

[3]Si noti: *min max*, ovverossia $\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y)$, quindi *non* il *max min* che abbiamo utilizzato altrove, in particolare nel contesto dei giochi a somma zero (pagina 96) e che menzioneremo ancora in seguito per i giochi cooperativi.

[4]Osservo che l'analisi sarà limitata alle sole strategie pure. E' una scelta giustificabile, vista l'intenzione di evitare i tecnicismi, essendo già l'analisi delle strategie pure in grado di offrire spunti molto interessanti. Non posso però evitare di ricordare che le strategie miste pongono

cui profilo di payoff dia a ciascun giocatore un risultato strettamente migliore del valore di *min max*. Se questa condizione è soddisfatta, si può mostrare che per ogni coppia (x, y) di azioni del gioco costituente, e comunque si scelga una soglia di tolleranza $\varepsilon > 0$, purché il numero K di ripetizioni sia sufficientemente grande, c'è un equilibrio del gioco ripetuto il cui payoff, per ogni giocatore, differisce per meno di ε dal payoff che otterrebbe se venisse sempre giocata la coppia di strategie (x, y). In realtà quanto appena affermato non è corretto: va precisata ancora una condizione. Non si può scegliere una coppia qualsiasi di azioni, ma solo una coppia che dia a ciascun giocatore un payoff maggiore del *min max*. E' una condizione che avevamo già anticipato: aggiungo che non è di alcun fastidio per il tipo di risultati che più ci interessano: mostrare che si possono ottenere, in equilibrio, payoff che sono efficienti[5] (per lo meno approssimativamente).

Non introduco i dettagli di una dimostrazione formale di questo fatto: il lettore interessato può consultare per esempio su questo punto Osborne e Rubinstein (1994), Proposizione 156.1 (approfitto dell'occasione per dire che Osborne e Rubinstein è un ottimo riferimento per i giochi ripetuti, come d'altronde il già citato Myerson (1991)).

Ciò che intendo fare è una descrizione informale di come si possa "'costruire" un equilibrio del gioco ripetuto con le caratteristiche richieste, su un esempio specifico. E' consigliabile adottare il punto di vista che una strategia di un giocatore sia un piano d'azione deliberato *prima* che il gioco abbia effettivamente

un problema molto "intrigante": quello della loro "osservabilità"; d'altronde, anche a livello di strategie pure non è facile capire quale strategia sia usata da un giocatore: si ricordi quanto detto a pagina 9. In fondo, nel gioco "a due stadi" una stessa "giocata" può derivare da ben 8 diverse strategie di I ed altrettante di II.

[5]Può essere comunque interessante osservare che in equilibrio si possono ottenere payoff intermedi e anche molto bassi: si può utilmente consultare ad esempio Myerson (1991), pag 329, in tal senso.

inizio.

Consideriamo il gioco "costituente"[6]:

$I \backslash II$	L	R	Z
T	$(2,2)$	$(0,5)$	$(0,0)$
B	$(5,0)$	$(1,1)$	$(0,0)$
W	$(0,0)$	$(0,0)$	$(-1,-1)$

Qui il valore di *min max* è 0 per entrambi i giocatori, quindi minore del payoff di equilibrio che è 1. Sfrutteremo questo fatto per "costruire" un equilibrio di Nash che dà ad entrambi i giocatori un payoff vicino a 2.

Per descrivere questo equilibrio ci metteremo dal punto di vista del giocatore I (ovviamente il caso di II è speculare) e ci servirà:

- la coppia di strategie (T, L) (che ci interessa perché dà luogo al payoff desiderato: 2 sia per I che per II)

- la coppia di strategie (B, R) (che corrisponde all'equilibrio di Nash)

- la strategia W di I, cioè la strategia di *min max* che serve ad I per poter "punire" il giocatore II (infatti, se I gioca W, il payoff che II può ottenere è al massimo 0, qualunque cosa lui faccia; si noti che è inferiore al payoff di equilibrio)

Il giocatore I inizia giocando T (ovvero, la sua componente della coppia di strategie che dà il risultato desiderato), e continua così fino allo stadio $K-H$ (il numero

[6] Si tratta essenzialmente del dilemma del prigioniero (a parte l'uso del payoff 5 anzichè 3, che è solo comodo per i calcoli che faremo) cui è stata aggiunta una riga e una colonna che un osservatore poco avveduto potrebbe considerare irrilevanti, visto che corrispondono a strategie fortemente dominate.

H vedremo in seguito come sceglierlo), a meno che il giocatore II non giochi qualcosa di diverso da T. Se questo avviene, allora I passa a giocare W dallo stadio successivo fino alla fine del gioco. Giunti allo stadio $K - H$, se non vi è stata prima alcuna "deviazione" di II (dalla strategia L), il giocatore I passa a giocare B fino alla fine del gioco.

Dobbiamo verificare che la strategia per I sopra descritta, assieme a quella "gemella" per II, dia effettivamente luogo ad un equilibrio di Nash: cioè vedremo se I abbia convenienza a "deviare" dalla strategia sopra descritta (assumendo che II non devii). Ovviamente, questa convenienza non ci può essere negli ultimi H stadi del gioco, visto che I "sta già giocando un equilibrio" in questi stadi finali (ricordo che stiamo assumendo che II non devii, per cui II gioca R negli stadi finali).

Negli stadi precedenti, avendo assunto che il giocatore II non devii, il giocatore I non si troverà mai a giocare W, ma solo T. Gli conviene "deviare"? Se lo fa, il giocatore II parte con la "punizione", da cui segue:

- I guadagna $f(B, L) - f(T, L) = 5 - 2 = 3$ per un solo stadio
- I perde *almeno* $f(B, R) - 0 = 1$ per *almeno* H stadi

Infatti, se I non avesse deviato avrebbe ottenuto almeno il payoff di equilibrio negli ultimi stadi, mentre deviando viene "punito" (cioè II gioca Z) e ne consegue che per bene che gli vada ottiene 0.

Quindi, è sufficiente che sia:

$$H \geq \frac{f(B, L) - f(T, L)}{f(B, R) - 0} = 3$$

Ora che abbiamo visto come la strategia descritta ci dia effettivamente un equilibrio di Nash, basterà verificare che i payoff ottenuti sono vicini quanto abbiamo richiesto al payoff "desiderato".

Se, ad esempio, si vuole ottenere un risultato che sia pari almeno a $2 - \varepsilon$ (dove ε è un numero reale "piccolo" che usiamo per dire quale tolleranza accettiamo), il numero di stadi K dovrà essere tanto grande da garantire che:

$$\left| \frac{(K-H)f(T,L) + Hf(B,R)}{K} - f(T,L) \right| < \varepsilon$$

Ovvero, che:

$$\frac{H}{K} \left| f(B,R) - f(T,L) \right| < \varepsilon$$

il che è chiaramente possibile purché K sia sufficientemente grande da soddisfare:

$$K > \frac{H}{\varepsilon} \left| f(B,R) - f(T,L) \right|$$

Ora che abbiamo visto, sia pure solo nel caso di un esempio, come si possa ottenere il risultato voluto, vediamo alcuni insegnamenti che ne possiamo trarre (naturalmente sotto le condizioni che abbiamo posto):

1. il dilemma del prigioniero, così "rigido", non è affatto rappresentativo della generalità dei casi

2. i giocatori riescono ad ottenere un payoff che può essere significativamente migliore di quello che verrebbe dalla pura e semplice ripetizione dell'equilibrio di Nash nel gioco costituente

3. per ottenere questo risultato, senza accordi vincolanti, serve che vi sia la possibilità di ritorsioni e che il numero di stadi sia abbastanza grande da poter permettere che la ritorsione sia in grado di controbilanciare il potenziale guadagno

4. naturalmente rimane aperto il problema della *credibilità* delle minacce insite nelle strategie di punizione. Non abbiamo dimostrato che il profilo di strategie descritto sia un equilibrio perfetto nei sottogiochi, anzi, in realtà non lo è, come vedremo ben presto

5. noi non lo abbiamo visto, perché non ne avevamo bisogno, ma si può usare furbescamente la definizione di equilibrio di Nash (che riguarda la stabilità rispetto a deviazioni *unilaterali*) per definire in modo veloce le strategie di equilibrio per il gioco ripetuto nel caso in cui vi siano più di due giocatori

6. sono tanti gli equilibri che troviamo! Questo significa che, se da un lato ci può fare piacere constatare che i giocatori sono in grado di ottenere risultati "buoni", dall'altro canto il potere predittivo dell'equilibrio di Nash si mostra essere molto povero, in un contesto quale quello dei giochi ripetuti

Riprendiamo il punto 4. Ho osservato che gli equilibri trovati non sono perfetti nei sottogiochi. In effetti, non solo loro non lo sono, ma non c'è proprio speranza: in un gioco con un solo equilibrio, l'unico equilibrio perfetto nei sottogiochi che si ha in una sua ripetizione finita consiste nell'impiego, da parte di ogni giocatore, *ad ogni nodo decisionale* della strategia di equilibrio per il gioco costituente.

Tuttavia, così come abbiamo visto che in talune circostanze si possono ottenere equilibri di Nash ben diversi dalla ripetizione "pedissequa" della strategia di equilibrio del gioco costituente, ci si può attendere che sotto opportune ipotesi vi possano essere delle novità anche a livello di equilibri perfetti nei sottogiochi. Così è, ma abbiamo bisogno che vi siano almeno *due* equilibri di Nash per il gioco costituente. Oltre a questo ingrediente essenziale, occorrono altre ipotesi. Non volendo addentrarmi nei tecnicismi del risultato formale, potrei dire in due parole ciò che è importante: avere la possibilità di punire il giocatore che devii dalla "buona strategia" mediante uno dei due equilibri di Nash (per poterlo fare, può essere utile che uno dei due equilibri domini l'altro).

Come dicono giustamente Osborne e Rubinstein (1994), sono molto interessanti i tipi di strategie usate, perché possiamo immaginare (sperare?) che trovino corrispondenza in norme sociali che si instaurano in situazioni reali di interazione strategica ripetuta.

E' evidente come, nel caso visto in dettaglio, l'equilibrio trovato corrisponde all'uso di strategie che mostrano una "buona disposizione d'animo" da parte dei giocatori, ma al contempo una vigile attenzione che li porta a reagire (e "per sempre") quando l'altro vuole approfittarne. Osservo come non sia essenziale che la reazione alla deviazione sia "imperitura": ciò che occorre, naturalmente, è che la punizione duri abbastanza da non rendere profittevole la "deviazione". D'altro canto, invece, è immediato verificare come, nell'esempio visto, una coppia di strategie che preveda semplicemente di giocare sempre e solo (T, L) non è un equilibrio di Nash (ad esempio, il giocatore I avrebbe vantaggio a "deviare", cioè a giocare B, all'ultimo stadio).

Ora che abbiamo visto "da vicino" uno dei più classici risultati relativi ai giochi *finitamente* ripetuti, illustrerò brevemente il caso dei giochi infinitamente ripetuti (con le loro difficoltà tecniche aggiuntive).

Prima vorrei però presentare un gioco che (come già accennato a pagina 6), dopo ogni stadio ha probabilità positiva di finire. Ho incontrato per la prima volta questo esempio sul libro di Myerson (1991) e mi aveva colpito la sua semplicità, frutto di una accurata scelta dei parametri che permette così di farsi una idea di cosa possa avvenire se abbiamo un gioco dalla durata temporale incerta.

Consideriamo il dilemma del prigioniero:

$I \backslash II$	L	R
T	$(2, 2)$	$(0, 3)$
B	$(3, 0)$	$(1, 1)$

Modellizziamo in questo modo la presenza di incertezza sulla durata dell'interazione: supponiamo che dopo ogni stadio, a partire dal primo, la probabilità di continuare sia del 99% (e quindi vi sia un 1% di probabilità che il gioco termini).

Consideriamo la strategia che consiste nel giocare T al primo stadio e che prevede di continuare a giocare T finché l'altro gioca L, e passare a B e giocare per sempre B, qualora l'altro giocasse R.

Questa strategia, accoppiata a quella speculare di II, dà luogo ad un equilibrio di Nash. Il payoff atteso è, assumendo che entrambi i giocatori giochino la strategia descritta[7]:

$$2 + 0.99 \cdot 2 + (0.99)^2 \cdot 2 + \ldots = 2 \cdot \left(1 + 0.99 + (0.99)^2 + ...\right) = 2\,\frac{1}{1 - 0.99} = 200,$$

mentre, se I devia, o il payoff non cambia (perché eventuali deviazioni, combinate con la strategia fissata di II, non coinvolgono il percorso realizzato in equilibrio e quindi di fatto non portano a giocare B), oppure diventa (qualora I giochi effettivamente B al *primo stadio* del gioco) al massimo:

$$3 + 0.99 \cdot 1 + (0.99)^2 \cdot 1 + \ldots = 3 + 0.99 \cdot \left(1 + 0.99 + (0.99)^2 + ...\right) =$$

$$= 3 + 0.99\,\frac{1}{1 - 0.99} = 102,$$

ed essendo $102 < 200$, una deviazione non è profittevole per I. Se la deviazione avviene a uno stadio successivo, il payoff atteso, *condizionato al fatto che già si è arrivati a giocare quello stadio*, resta 102 e quindi è di nuovo inferiore al payoff atteso senza deviazione (anche questo, condizionatamente al fatto che si è arrivati fino a quello stadio).

Abbiamo ottenuto un risultato molto interessante, rispetto a quello che avveniva nel caso dei giochi finitamente ripetuti. E' possibile, per i giocatori, avere un equilibrio di Nash che dia loro un payoff migliore di quello previsto dall'*unico* equilibrio del gioco costituente. Cosa che, col dilemma del prigioniero, come ab-

[7] Utilizzo il fatto che la somma di una progressione geometrica di "ragione" d con $n+1$ termini, cioè $1 + d + d^2 + ... + d^n$, vale $\frac{1-d^{n+1}}{1-d}$; da qui segue che la somma della serie geometrica, ovverossia $1 + d + d^2 + ...$, è uguale a $\frac{1}{1-d}$, se $0 < d < 1$

biamo visto, non può verificarsi in un gioco finitamente ripetuto (in qanto il gioco costituente ha in equilibrio payoff uguali ai valori di *min max*).

Come mai? Una ragione chiave è data dal fatto che non esiste "l'ultima mossa". Ovverossia, ogni stadio potrebbe anche essere l'ultimo, ma è anche altrettanto vero che il gioco potrebbe continuare. Se c'è un ultimo stadio, ineluttabilmente in quello stadio per I è conveniente adottare la strategia B. Il "guaio" sta nel fatto che razionalità ed intelligenza dei giocatori sono conoscenza comune, e quindi II non ha problemi a prevedere questa scelta da parte di I, scegliendo quindi di deviare *allo stadio precedente*, visto che non ha comunque nessuna speranza di indurre un atteggiamento di reciprocità da parte di I adottando una strategia benevolente al penultimo stadio, e così via...

Avendo visto come sia possibile ottenere un risultato efficiente nel caso del dilemma del prigioniero a durata "aleatoria", non dovrebbe sorprendere che si possa ottenere un risultato similare quando il gioco sia ripetuto infinite volte. E' anche abbastanza prevedibile che strategie come quelle che abbiamo visto ci permetteranno di ottenere un equilibrio. Occorre prestare attenzione a un aspetto: se il gioco ha una durata infinita ci troviamo a dover sommare infiniti numeri (i payoff che si ottengono a ogni stadio). Il modo più semplice per ovviare a questo "inconveniente" è quello di introdurre un "fattore di sconto" (che ha una naturale interpretazione come misura della "impazienza" dei giocatori). In questo modo, ci si ritrova di fronte lo stesso tipo di calcoli che abbiamo visto nel caso di una durata "aleatoria". In effetti, basta sostituire al fattore $0,99$ il fattore di sconto (che come da tradizione indicherò con δ) e otteniamo risultati del tutto analoghi. La strategia che consiste nel giocare T al primo stadio e a ogni stadio successivo, purchè non vi siano deviazioni da parte dell'altro giocatore (nel qual caso si passa a giocare B per sempre), permette a I di ottenere il payoff:

$$2 + \delta \cdot 2 + \delta^2 \cdot 2 + ... + \delta^n \cdot 2 + ...$$

Deviando a un certo stadio k, invece, il payoff suo sarebbe non superiore a:

$$2 + \delta \cdot 2 + ... + \delta^{k-1} \cdot 2 + \delta^k \cdot 3 + \delta^{k+1} \cdot 1 + ... + \delta^n \cdot 1 + ...$$

Quindi la differenza fra i payoff è pari almeno a:

$$\delta^k \Big[\Big(2 + \delta \cdot 2 + \delta^2 \cdot 2 + ... + \delta^n \cdot 2 + ... \Big) -$$

$$\Big(3 + \delta \cdot 1 + \delta^2 \cdot 1 + ... + \delta^n \cdot 1 + ... \Big) \Big] =$$

$$\delta^k \Big[\delta \Big(1 + \delta + \delta^2 + ... + \delta^n + ... \Big) - \Big(2 - 3 \Big) \Big] = \delta^k \Big[\frac{\delta}{1-\delta} - 1 \Big]$$

Ed è non negativa quando $\frac{\delta}{1-\delta} \geq 1$, cioè $\delta \geq \frac{1}{2}$. Pertanto, a meno che il fattore di sconto non sia "troppo piccolo", non c'è convenienza a deviare. Il fatto che il risultato dipende dal "fattore di sconto" non deve stupire: se i payoff ottenuti nel futuro non sono considerati importanti dal giocatore, verrà meno l'effetto di deterrenza incorporato nelle strategie che stiamo considerando: la punizione che certamente verrà non sarà così grave da controbilanciare il guadagno ottenuto "qui e ora" deviando. Non occorre molta fantasia per immaginare situazioni della vita in cui ci si può trovare ad aver a che fare con un "fattore di sconto molto piccolo". Si noti l'interessante connessione fra fattore di sconto e "probabilità di continuare" che emerge dal confronto con l'esempio di Myerson, una connessione che non è tipica della TdG, ma riguarda in generale problemi di decisione.

Questo semplice esempio chiude il capitolo. Si tratta di un caso particolare di tutta una serie di risultati riguardanti i giochi infinitamente ripetuti che vanno sotto il nome complessivo di "folk theorem": il "messaggio" convogliato da questi risultati è che in un gioco infinitamente ripetuto si può ottenere come payoff di equilibrio una qualsivoglia coppia di payoff del gioco costituente purché non siano peggiori dei payoff di *min max*, in particolare coppie di payoff efficienti soddisfacenti questa condizione. Il lettore interessato ad approfondire l'affascinante tematica dei giochi ripetuti può utilmente consultare i libri di Osborne e Rubinstein (1994) e di Myerson (1991); avremo comunque occasione di ritornare su alcune questioni connesse in alcuni dei capitoli successivi.

Osservo, anche per stimolare la curiosità del lettore, che ho ignorato i giochi stocastici (detto in breve: ad ogni stadio viene "sorteggiato" il gioco componente che i giocatori saranno chiamati a giocare nello stadio successivo); i giochi nei quali vi è un giocatore che vive "eternamente" ed affronta giocatori i quali, invece, cambiano ad ogni stadio; i giochi in cui le mosse (o gli esiti) non sono perfettamente osservabili. Noto anche che, pur se non ho del tutto ignorato l'interpretazione delle strategie d'equilibrio nei giochi ripetuti, vi sarebbe ben più da dire: su questo, molto è stato fatto in un contesto di apprendimento e di "evoluzione" (temi che verranno introdotti nel capitolo 7); il lettore interessato può consultare Binmore (1994 e 1998) e Young (1998).