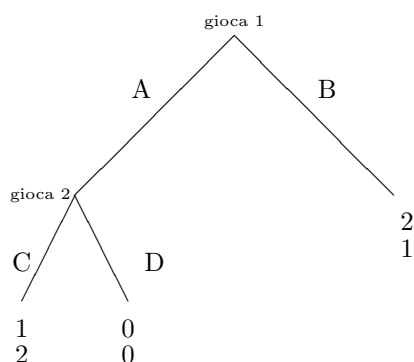


Dato il seguente gioco in forma estesa, descriverlo in forma strategica:



Calcolarne poi gli equilibri di Nash in strategie pure.

Soluzione

Strategie del giocatore *I*: *A* e *B*

Strategie del giocatore *II*: se *A*, *C*; se *A*, *D*

<i>I</i> \ <i>II</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>A</i>	(1, 2)	(0, 0)
<i>B</i>	(2, 1)	(2, 1)

N.B. Quando *I* gioca *B*, il gioco si conclude prima che *II* giochi la sua mossa.

Abbiamo due equilibri di Nash in strategie pure: (B, C) e (B, D) (si noti che solo (B, C) , quello che si trova con l'induzione a ritroso, è perfetto nei sottogiochi).

Calcolare gli equilibri di Nash in strategie miste del seguente gioco:

I/II	t_1	t_2
s_1	1,2	2,1
s_2	3,1	1,3

Soluzione

In strategie pure non c'è equilibrio di Nash. Passo alle strategie miste e assegno distribuzione di probabilità sulle diverse mosse dei giocatori.

$$U_I(p, q) = 1(pq) + 3q(1 - p) + 2p(1 - q) + 1(1 - p)(1 - q)$$

$$U_{II}(p, q) = 2(pq) + 1q(1 - p) + 1p(1 - q) + 3(1 - p)(1 - q)$$

Fissato q , cerco la miglior risposta per I , cioè cerco, al variare di p , il max della funzione di utilità di I :

$$U_I(p, q) = pq + 3q - 3pq + 2p - 2pq + 1 - q - p + pq = -3pq + 2q + p + 1 = (1 - 3q)p + 2q + 1$$

Per q fissato, questa è l'equazione di una retta che considero nell'intervallo $[0, 1]$ perché $0 \leq p \leq 1$.

$$\text{Se } 1 - 3q > 0, \quad \text{cioè } q < 1/3 : \quad \text{max per } p = 1$$

$$\text{Se } 1 - 3q < 0, \quad \text{cioè } q > 1/3 : \quad \text{max per } p = 0$$

$$\text{Se } 1 - 3q = 0, \quad \text{cioè } q = 1/3 : \quad \text{max per ogni } p$$

Fissato p , cerco la miglior risposta per II , cioè cerco al variare di q il max della funzione di utilità di II :

$$U_{II}(p, q) = 2pq + q - pq + p - pq + 3 - 3q - 3p + 3pq = 3pq - 2q - 2p + 3 = (3p - 2)q - 2p + 3.$$

$$\text{Se } 3p - 2 > 0, \quad \text{cioè } p > 2/3 : \quad \text{max per } q = 1$$

$$\text{Se } 3p - 2 < 0, \quad \text{cioè } p < 2/3 : \quad \text{max per } q = 0$$

$$\text{Se } 3p - 2 = 0, \quad \text{cioè } p = 2/3 : \quad \text{max per ogni } q$$

Disegnando nel piano cartesiano le curve di miglior risposta di I e di II , queste si incontrano in un solo punto $(2/3, 1/3)$ che corrisponde all'equilibrio di Nash in strategie miste. Questo significa che I gioca con $p = 2/3$ la strategia s_1 e con $p = 1/3$ gioca s_2 . II gioca con $q = 1/3$ la sua strategia t_1 e con $q = 2/3$ gioca t_2 .

Si ha, inoltre:

$$U_I(2/3, 1/3) = 5/3$$

$$U_{II}(2/3, 1/3) = 5/3$$

Calcolare l'equilibrio di Nash in strategie completamente miste del seguente gioco (di Aumann) in forma strategica:

$I \backslash II$	L	R
T	(6, 6)	(2, 7)
B	(7, 2)	(0, 0)

Per quanto riguarda le strategie miste, usiamo come di solito $p, 1 - p$ e $q, 1 - q$ per indicare le strategie miste rispettivamente di I e II .

Il payoff atteso di I è:

$$\begin{aligned} f(p, q) &= 6pq + 2p(1 - q) + 7(1 - p)q = 6pq + 2p - 2pq + 7q - 7pq = \\ &= -3pq + 2p + 7q = p(2 - 3q) + 7q \end{aligned}$$

Quindi per $q < 2/3$ la best reply per I è $p = 1$, per $q = 2/3$ è tutto $[0, 1]$, per $q > 2/3$ la best reply è $p = 0$.

Per II il payoff atteso è:

$$\begin{aligned} g(p, q) &= 6pq + 7p(1 - q) + 2(1 - p)q = 6pq + 7p - 7pq + 2q - 2pq = \\ &= -3pq + 2q + 7p = q(2 - 3p) + 7p \end{aligned}$$

Quindi per $p < 2/3$ la best reply per II è $q = 1$, per $p = 2/3$ è tutto $[0, 1]$, per $p > 2/3$ la best reply è $q = 0$.

In figura 1 disegniamo le best reply.

Le best reply ci permettono di individuare gli equilibri di Nash in strategie miste. Ritroviamo i due equilibri puri ed uno in strategie completamente miste (il cui payoff atteso è di $14/3$ per entrambi i giocatori).

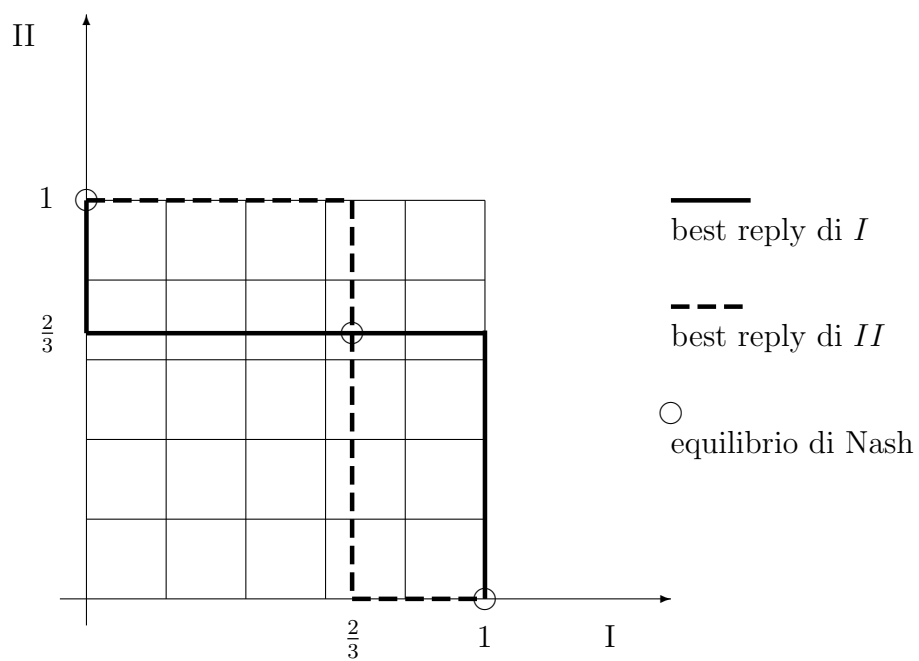


Figura 1: I grafici delle corrispondenze di miglior risposta