1 Equazioni alle differenze e transizione al caos

In una generica equazione differenziale del primo ordine in forma normale nella funzione incognita $x(t)$:

$$x'(t) = F(t, x(t)) \tag{1}$$

sia la variabile indipendente t che la variabile dipendente x sono variabili continue che variano in $\mathbb{R}$ o in un opportuno intervallo contenuto in $\mathbb{R}$.

In alcuni casi però, quando si cerca di fare un modello matematico di un fenomeno naturale, può essere opportuno discretizzare la variabile dipendente x (un esempio è dato dal caso di "passeggiate aleatorie" che possono essere usate per modellizzare processi stocastici di nascita e morte) oppure la variabile indipendente t (in tal caso si ottiene un'*equazione alle differenze*, che definirò tra poco). Le equazioni alle differenze sono importanti anche perché nella maggior parte dei casi le equazioni differenziali non si sanno risolvere analiticamente (con una formula), ma solo con metodi numerici approssimati (col computer), i quali in realtà risolvono un'opportuna equazione alle differenze associata all'equazione differenziale data.

Un esempio tipico di fenomeno in cui conviene considerare discretizzata la variabile indipendente (il tempo t) potrebbe essere la crescita di popolazioni con generazioni che non si sovrappongono, come ad esempio certi insetti che depongono uova che si schiuderanno l'anno dopo, o certe piante che fanno semi che germoglieranno l'anno dopo, o anche certi vertebrati la cui riproduzione presenta un andamento stagionale (i salmoni!).

In questo esempio conviene discretizzare il tempo in anni, facendogli assumere solo i valori interi $0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ (anni) e indicando con x_n la numerosità della popolazione al tempo n.

Supponendo che il tasso di crescita da un anno al successivo sia una certa costante $a > 0$, ($a=$ numero medio di discendenti generati da un individuo ogni anno) si ha allora il modello semplicissimo di *crescita esponenziale discreta*:

$$x_{n+1} = x_n + ax_n = (1 + a)x_n \tag{2}$$

Se invece supponiamo che ci sia un valore di saturazione M, corrispondente all'esaurimento delle risorse, e che il tasso di crescita sia proporzionale alla percentuale di risorse non utilizzate $\left(1 - \frac{x_n}{M}\right)$, si ha il seguente modello di *crescita logistica discreta*:

$$x_{n+1} = x_n + ax_n \left(1 - \frac{x_n}{M}\right) = x_n + ax_n - \frac{ax_n^2}{M}$$

e ponendo $\frac{a}{M} = b$:

$$x_{n+1} = x_n + ax_n - bx_n^2 \tag{3}$$

La (2) e la (3) sono esempi particolari di *equazioni alle differenze* nella funzione[1] incognita $n \mapsto x_n$ della variabile discreta n. La più generica *equazione alle differenze del primo ordine in forma normale* è un'equazione del tipo:

$$x_{n+1} = G(n, x_n) \tag{4}$$

Il nome *equazione alle differenze* deriva dal fatto che essa esprime la differenza $x_{n+1} - x_n$ (incremento della funzione x_n tra 2 valori successivi della variabile indipendente) mediante una funzione $H(n, x_n) = G(n, x_n) - x_n$ delle 2 variabili n, x.

Se G non dipende esplicitamente da n, ma solo da x_n, l'equazione alle differenze si dice *autonoma*. Le equazioni della crescita esponenziale discreta e della crescita logistica discreta sono esempi di equazioni alle differenze autonome.

È ovvio che la generica equazione alle differenze (4) si può risolvere in modo banale, e ammette una e una sola soluzione una volta fissato il valore iniziale x_0 che x_n assume per $n = 0$. Infatti, noto x_0, si possono calcolare successivamente $x_1 = G(0, x_0)$, $x_2 = G(1, x_1)$, $\ldots$, $x_k = G(k-1, x_{k-1})$, $\ldots$ per ogni valore intero di k.

Si può anche generalizzare la definizione di equazione alle differenze e considerare una generica *equazione alle differenze di ordine p in forma normale*, che è del tipo :

$$x_n = G(n, x_{n-1}, x_{n-2} \ldots x_{n-p})$$

In questa equazione il valore di x nel punto n dipende da n e dai valori di x nei p punti immediatamente precedenti.

È ovvio che esiste ed è unica la soluzione di quest'equazione se noi fissiamo p condizioni iniziali (i valori $x_0, x_1 \ldots x_{p-1}$).

In alcuni casi la soluzione di un'equazione alle differenze si sa anche esprimere in forma esplicita, con una formula che dà direttamente x_n in funzione di n. È il caso ad esempio della crescita esponenziale discreta, espressa dall'equazione:

$$x_{n+1} = (a+1)x_n \tag{5}$$

Essa si risolve considerando le n uguaglianze :

$$x_1 = (a+1)x_0$$

[1] In queste note verrà spesso impropriamente utilizzata la notazione x_n per indicare la funzione $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto x_n$, in analogia con l'uso (scorretto) di indicare una funzione come $f(x)$ anziché f. Sarebbe corretto indicare la funzione $n \mapsto x_n$ con x, non certo con x_n che denota il valore che tale funzione assume nel punto $n \in \mathbb{N}$.

$$x_2 = (a+1)x_1$$
$$\dots$$
$$x_{n-1} = (a+1)x_{n-2}$$
$$x_n = (a+1)x_{n-1}$$

moltiplicandole membro a membro e semplificando $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}$ si ottiene la soluzione:

$$x_n = (a+1)^n x_0$$

Al crescere di n, x_n cresce esponenzialmente e tende a $+\infty$ per $n \to +\infty$. Il comportamento della soluzione è molto simile al caso dell'equazione differenziale della crescita esponenziale ($x'(t) = ax(t), x(0) = x_0$) che ha come soluzione $x(t) = x_0 e^{at}$.

Diverso è il caso della crescita logistica discreta, espressa dall'equazione:

$$x_{n+1} = x_n + ax_n - bx_n^2$$

essa non si può risolvere in forma esplicita e la soluzione dà luogo a dei fenomeni strani, del tutto diversi da quel che succede nel caso della crescita logistica continua, espressa dall'equazione differenziale $x'(t) = ax(t) - bx^2(t)$.

Per semplicità, consideriamo il caso particolare $a = b$. Ciò equivale a porre il livello di saturazione $M = 1$ (il che non è restrittivo perché equivale a cambiare l'unità di misura sull'asse x) e allora l'equazione della logistica discreta diventa:

$$x_{n+1} = (a+1)x_n - ax_n^2 \tag{6}$$

Fissato un valore iniziale $x_0 \in (0,1)$, cioè positivo e minore del valore di saturazione, la (5) può essere risolta iterativamente, ma la soluzione presenta andamenti molto diversi al variare del parametro $a > 0$, che rappresenta il tasso di crescita quando x_n è molto minore di 1, cioè quando siamo lontani dalla saturazione. Si possono avere vari casi:

- CASO 1: $a \in [0,1]$, *crescita monotòna.* In questo caso la soluzione x_n è sempre crescente e per $n \to \infty$ tende al valore di saturazione 1.

  Si ha cioè un comportamento molto simile a quello della soluzione dell'equazione differenziale $x'(t) = ax(t)\,(1 - x(t))$ della logistica continua. Questo risultato si può dimostrare abbastanza facilmente e può anche essere illustrato graficamente (fig.13.1).

  Consideriamo la funzione

  $$y = \varphi(x) = (a+1)x - ax^2$$

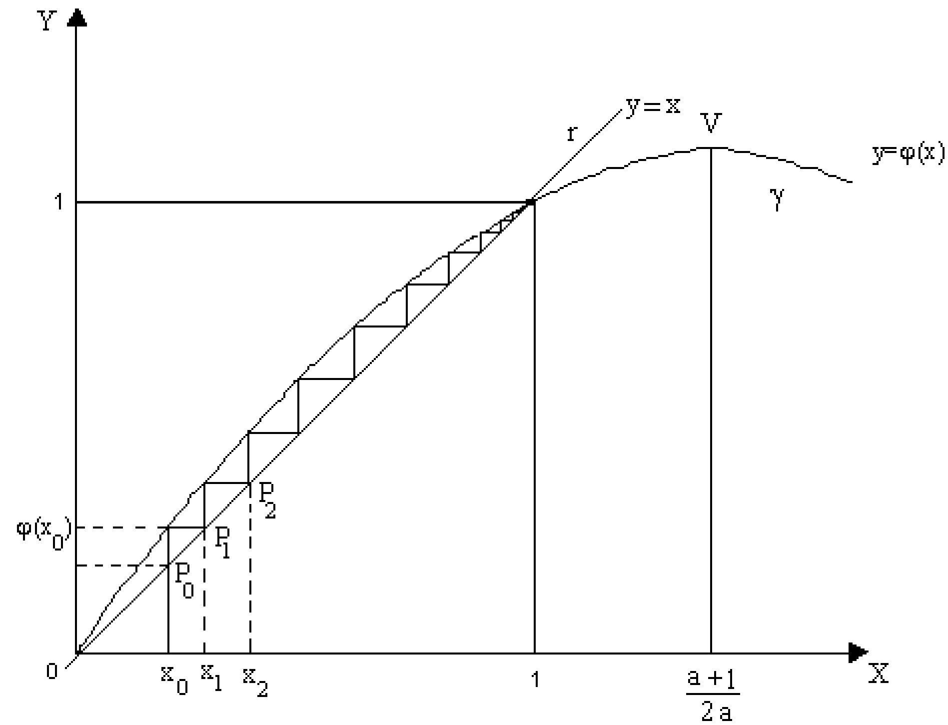


Figura 13.1

il cui grafico è una parabola γ passante per i 2 punti $(0,0)$ e $(1,1)$, avente concavità verso il basso, asse parallelo all'asse y e vertice nel punto $V = \left(\frac{a+1}{2a}, \frac{(a+1)^2}{4a}\right)$. L'equazione alle differenze (5) si può allora, scrivere così

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

Se noi consideriamo il punto P_0 di coordinate (x_0, x_0), tracciamo da P_0 la parallela all'asse y e dal punto in cui essa incontra la parabola γ tracciamo la parallela all'asse x e chiamiamo P_1 il punto in cui essa incontra la retta $y = x$ (fig.13.1), è chiaro che P_1 ha coordinate $(x_1, x_1) = (\varphi(x_0), \varphi(x_0))$. In modo analogo si può costruire $P_2 = (x_2, x_2)$ a partire da P_1, e in generale, $P_{n+1} = (x_{n+1}, x_{n+1})$ a partire da $P_n = (x_n, x_n)$.

Poiché nell'intervallo $[0, 1]$ la parabola γ e la retta $y = x$ sono entrambe crescenti e la parabola sta sempre sopra la retta, è chiaro dalla fig.13.1 (e si può dimostrare facilmente) che la successione $\{x_n\}$è strettamente crescente (cioè $x_n < x_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$) e che $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.

- CASO 2: $a \in [1, 2]$, *oscillazioni smorzate.* In questo caso la soluzione

x_n tende ancora al valore di saturazione 1 per $n \to \infty$, ma compie delle oscillazioni smorzate intorno a 1. Per n abbastanza grande i valori di x_n sono alternativamente maggiori e minori di 1.

Un comportamento del genere *non era possibile* nel caso della logistica

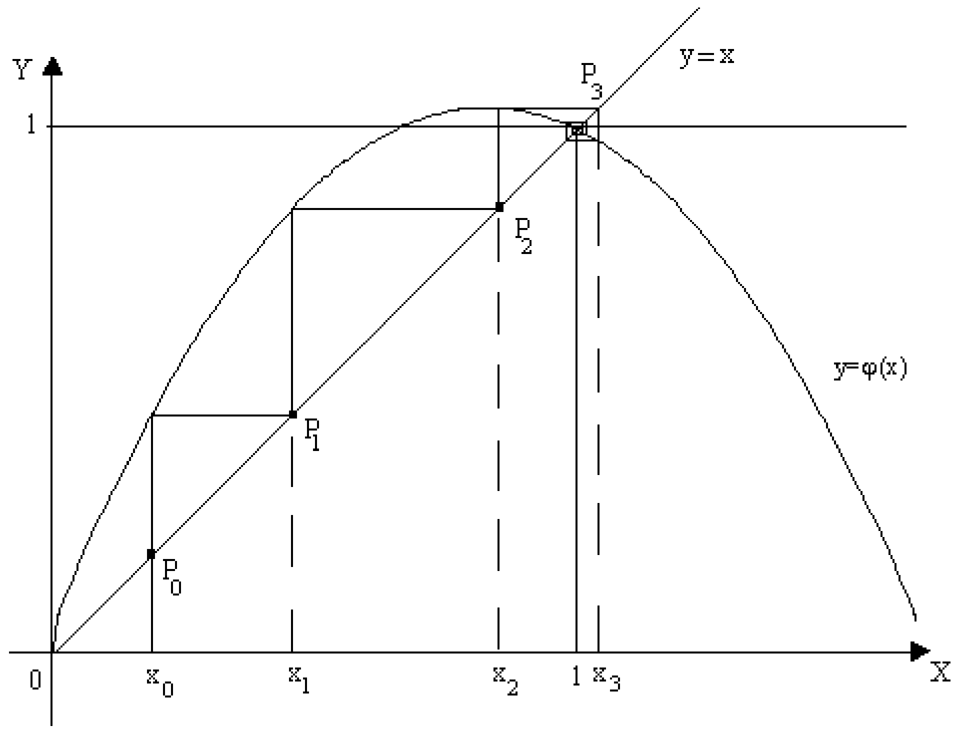
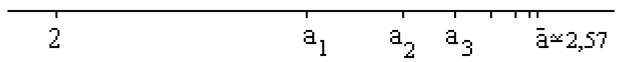


Figura 13.2

In questo caso, la parabola di equazione $y = \varphi(x) = (a+1)x - ax^2$ ha il vertice nel punto di ascissa $\frac{a+1}{2a} < 1$ ed è decrescente nel punto $(1,1)$, con pendenza minore di $45°$(infatti, $\varphi'(1) = 1 - a \in [-1, 0]$). Allora, si può dimostrare facilmente che la successione di punti $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$ costruita nello stesso modo del caso precedente converge al punto $(1,1)$ e la successione $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ delle ascisse di questi punti converge a 1 oscillando (in fig. 13.2 $x_n < 1$ se n è pari ≥ 2, $x_n > 1$ se n è dispari ≥ 3).

- CASO 3: $a \in [2, 2.57]$*: soluzione quasi periodica.* Quando il tasso di crescita a supera il valore 2, la situazione si complica rapidamente. Se a varia nell'intervallo $[2, 2.57]$ abbiamo una successione di valori cr

lir



(i primi valori sono $a_1 = 2.449, a_2 = 2.544, a_3 = 2.564$) e si ha che:

- Se $a \in [2, a_1[$ la soluzione è quasi periodica di periodo 2, cioè i termini pari (x_{2n}) tendono ad un valore l_1 ed i termini dispari (x_{2n+1}) tendono ad un valore diverso l_2, perciò per n grande, la successione $\{x_n\}$ diventa indistinguibile da una successione periodica di periodo 2, che alterna i 2 valori l_1, l_2.
- Se $a \in [a_1, a_2[$ la soluzione è quasi periodica di periodo 4 cioè per n grande diventa indistinguibile da una successione periodica di periodo 4.
- Se $a \in [a_2, a_3[$ la soluzione è quasi periodica di periodo 8 e in generale se $a \in [a_n, a_{n+1}[$ la soluzione è quasi periodica di periodo 2^{n+1}.

Per alcuni valori particolari del tasso di crescita a e del valore iniziale x_0 può darsi che la soluzione sia esattamente periodica, come mostra la fig. 13.3 nel caso del periodo 2.

Nella figura la parabola di equazione $y = \varphi(x) = (a+1)x - ax^2$ è decrescente con pendenza maggiore di 45° nel punto $(1, 1)$ ed il quadrato AP_2BP_3 ha 2 vertici sulla parabola e gli altri 2 sulla retta $y = x$. Perciò la successione $x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots, x_n, \ldots$ costruita come nei casi precedenti ripete indefinitamente i 2 valori x_2, x_3 (cioè si ha $x_2 = x_4 = x_6 \ldots = x_{2n}$ e $x_3 = x_5 = x_7 \ldots = x_{2n+1}$ per ogni $n \geq 1$).

- CASO 4: $a > 2.57$, *comportamento caotico.* Se $a > \bar{a} = 2.57$ il comportamento della soluzione $\{x_n\}$ diventa praticamente imprevedibile: essa presenta delle oscillazioni molto irregolari di ampiezza variabile, che sembrano quasi una sequenza di numeri casuali.

  Si tratta in realtà di numeri pseudo - casuali perché sono generati con la formula deterministica $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Inoltre, piccole variazioni del tasso di crescita a o del valore iniziale x_0 possono provocare, per n abbastanza grande, grandi variazioni di x_n. Questo comportamento è noto come *comportamento caotico* e si dice che il valore $\bar{a} \simeq 2.57$ segna la *transizione al caos*

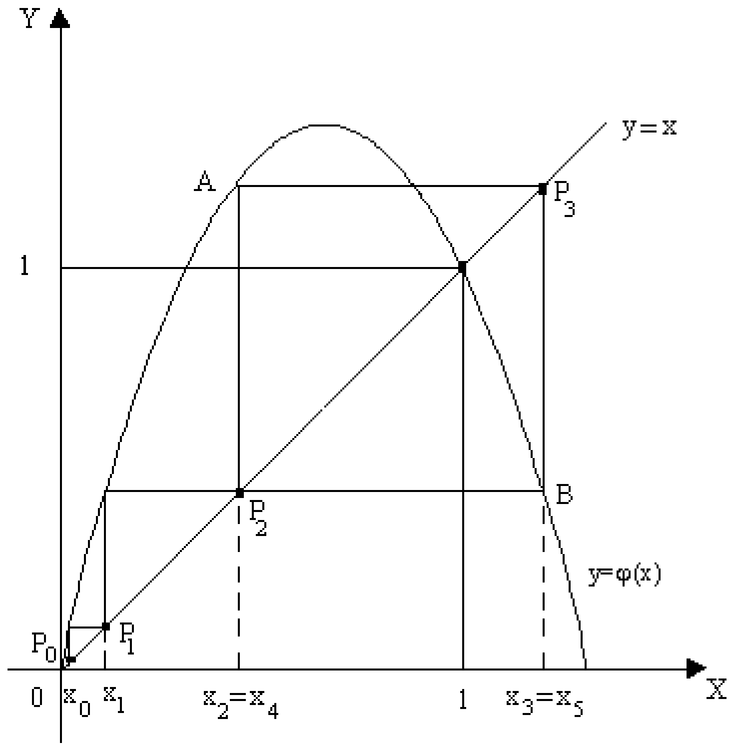


Figura 13.3

Le figure 13.4 A,B,C,D,E,F (in cui è sempre $x_0 = 0.1$) mostrano un esempio di crescita monotòna ($a = 0.9$, fig. A), un esempio di oscillazione smorzata ($a = 1.98$, fig. B), un esempio di periodo 2 ($a = 2.3$, fig. C), un esempio di periodo 4 ($a = 2.5$, fig. D) e due esempi di caos ($a = 2.8$, fig. E ; $a = 3$, fig. F).

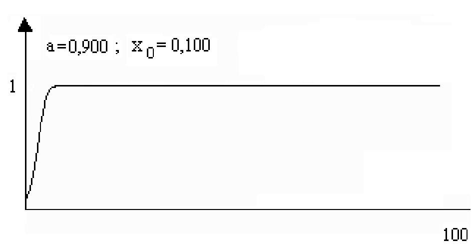


Figura 13.4 - A

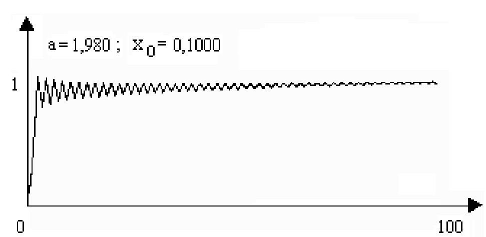


Figura 13.4 - B

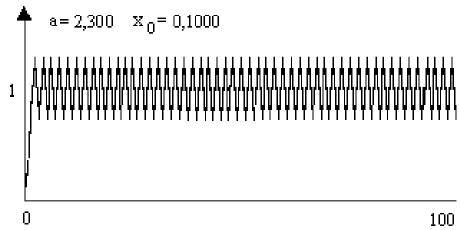


Figura 13.4 - C

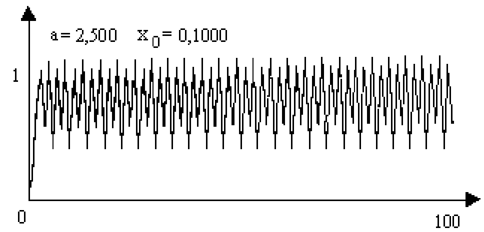


Figura 13.4 - D

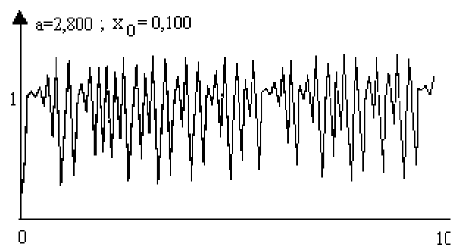


Figura 13.4 - E

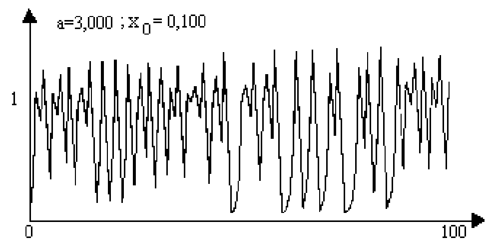


Figura 13.4 - F

Notiamo come al crescere di a tende ad aumentare l'ampiezza delle oscillazioni. Nel caso $a = 3, x_0 = 0.1$, le oscillazioni arrivano quasi a "toccare" l'asse delle ascisse. Se questo succede, cioè se esiste un numero naturale $\bar{n}$ per cui $x_{\bar{n}} \leq 0$, allora è chiaro che $x_n \leq 0$ per ogni $n > \bar{n}$. Ciò significa che la popolazione si estingue dopo un numero finito $\bar{n}$ di generazioni.

Aumentando a questo succede sempre, però in modo del tutto imprevedibile, che cambia completamente per piccole variazioni del valore iniziale x_0. Ad esempio, per $x_0 = 0.1$, tabulando al calcolatore i primi 100 valori di x_n e facendo variare a da 3 a 4 con passo 0.01, si vede che per tutti i valori di a da 3.01 a 3.54 la popolazione si estingue in un numero finito $\bar{n} < 100$ di generazioni, però $\bar{n}$ varia in modo del tutto irregolare al crescere di a. Per $a \geq 3.55$ invece si ha sempre $\bar{n} = 2$, cioè la popolazione si estingue già alla seconda generazione.

Questo accade in generale: fissato x_0, se il tasso di crescita (a) è abbastanza grande si ha $x_1 > 1 + \frac{1}{a}$ e allora, $x_2 = \varphi(x_1) = x_1(a + 1 - ax_1) \leq (a + 1 - a - 1) = 0$ e quindi $x_n \leq 0$ per ogni $n \geq 2$.

Quindi, nel caso della logistica discreta, all'aumentare del tasso di crescita a si verificano successivamente 6 situazioni diverse:

1. crescita monotòna;

2. oscillazioni smorzate;

3. periodicità di periodo $2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n, \ldots$;

4. caos;

5. estinzione in un tempo finito;

6. estinzione alla seconda generazione.

Niente di tutto ciò, evidentemente, può succedere per la logistica continua.

Rapporti tra equazioni differenziali ed equazioni alle differenze

Uno dei metodi più semplici di soluzione numerica approssimata di una generica equazione differenziale del primo ordine in forma normale nella funzione incognita $x(t)$:

$$x'(t) = F(t, x(t)) \tag{7}$$

con la condizione iniziale $x(0) = x_0$ è il *metodo di Eulero*. Supponiamo per semplicità di voler risolvere la (7) in un certo intervallo $[0, T]$ e discretizziamo il tempo t, suddividendo l'intervallo $[0, T]$ in n intervallini uguali di ampiezza $h = T/n$. Supponiamo che n sia abbastanza grande (h abbastanza piccolo) in modo che nell'i-esimo intervallino $(ih, (1+i)h)$ la derivata $x'(t)$ si possa considerare praticamente costante e uguale al rapporto incrementale , cioè:

$$x'(t) \simeq \frac{x((i+1)h) - x(ih)}{h} \quad \forall t \in (ih, (i+1)h)$$

allora il grafico della soluzione $x(t)$ della (1) nell'intervallino considerato si può approssimare con la sua retta tangente nel punto iniziale. Prendendo $t = ih$, dall'uguaglianza precedente si ricava:

$$\frac{x((i+1)h) - x(ih)}{h} \simeq x'(ih) = F(ih, x(ih))$$

A questo punto consideriamo solo i valori di xt nei punti ih ($i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$) e indichiamo $x(ih)$ con x_i. Sostituendo nell'uguaglianza precedente il segno $\simeq$ (circa uguale) col segno $=$ (uguale) si ottiene:

$$x_{i+1} - x_i = hF(ih, x_i) \tag{8}$$

Questa è un'equazione alle differenze associata all'equazione differenziale (7) mediante il processo di discretizzazione di t con passo h (ad essere precisi non si tratta di una sola equazione alle differenze, bensì di una famiglia di equazioni alle differenze diverse, una per ogni valore di h).

Se noi risolviamo l'equazione alle differenze (8) e poi uniamo con una spezzata i successivi punti (ih, x_i), è intuitivo che otterremo una soluzione approssimata dell'equazione differenziale e che l'approssimazione sarà tanto migliore quanto più è piccolo il passo h.

In opportune ipotesi (verificate nei casi più comuni) si può dimostrare che per $h \to 0$ la soluzione approssimata dell'equazione differenziale converge alla soluzione esatta $x(t)$ in ogni intervallo limitato $[a, b]$. In questo consiste il metodo di Eulero.

Esempio 1.1 CRESCITA ESPONENZIALE.
L'equazione differenziale della crescita esponenziale è $x'(t) = ax(t)$. Se noi la risolviamo col metodo di Eulero con passo h, ad essa corrisponde la seguente equazione alle differenze:

$$x_{i+1} - x_i = hax_i \qquad x_{i+1} = (ha + 1)x_i$$

che coincide con l'equazione alle differenze della crescita esponenziale discreta con tasso di crescita ha (equazione (5)).

Dato il valore iniziale x_0, la sua soluzione è:

$$x_i = (ha + 1)^i x_0$$

Supponiamo ad esempio, di voler risolvere l'equazione differenziale $x'(t) = ax(t)$ con $x(0) = x_0$ nell'intervallo $[0, T]$, col metodo di Eulero , suddividendo l'intervallo $[0, T]$ in n intervallini uguali di ampiezza $h = \frac{T}{n}$. Nel punto T il metodo di Eulero ci dà:

$$x(T) = x_n = (ha + 1)^n x_0 = x_0 \left(1 + \frac{Ta}{n}\right)^n$$

Invece la soluzione esatta dell'equazione differenziale è $x(t) = x_0 e^{at}$ ed è facile vedere che nel punto T per $n \to \infty$ la soluzione approssimata tende alla soluzione esatta. Infatti:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_0 \left(1 + \frac{Ta}{n}\right)^n = x_0 e^{Ta}$$

Analogamente si può far vedere che la soluzione approssimata tende alla soluzione esatta in ogni punto dell'intervallo $[0, T]$. ■

Esempio 1.2 CRESCITA LOGISTICA.
L'equazione differenziale della crescita logistica è $x'(t) = ax(t) - bx^2(t)$. Se noi la risolviamo col metodo di Eulero con passo h, ad essa corrisponde la seguente equazione alle differenze:

$$x_{i+1} - x_i = hax_i - hbx_i^2$$

Nel caso particolare $a = b$ (che equivale a porre uguale a 1 il livello di saturazione $M = \frac{a}{b}$ e non è restrittivo, perché equivale a cambiare l'unità di misura sull'asse x) quest'equazione diventa:

$$x_{i+1} = (ha + 1)x_i - hax_i^2$$

e coincide con l'equazione alle differenze della crescita logistica discreta con tasso di crescita ha (vedi equazione 6).

Risolvendo quest'equazione col calcolatore, il che equivale a risolvere l'equazione differenziale della crescita logistica col metodo di Eulero, si ha si ha una soluzione approssimata dell'equazione differenziale. Fissato un intervallo $[0, T]$ e una condizione iniziale $x(0) = x_0$ e posto $h = \frac{T}{n}$, si può dimostrare che per $n \to \infty$ $(h \to 0)$, la soluzione approssimata tende alla soluzione esatta dell'equazione differenziale in ogni punto dell'intervallo $[0, T]$.

Però nel caso della crescita logistica bisogna stare molto attenti alla scelta del passo h. Se h è troppo grande, la soluzione approssimata può presentare delle oscillazioni smorzate (questo succede se $\frac{1}{a} < h < \frac{2}{a}$), oppure un comportamento periodico (se $\frac{2}{a} < h < \frac{2.57}{a}$) o un comportamento caotico (se $h > \frac{2.57}{a}$) oppure può estinguersi (cioè diventare negativa) dopo un numero finito di passi. Invece, scegliendo h abbastanza piccolo, (e precisamente $h < \frac{1}{a}$) la soluzione approssimata ha un andamento crescente che tende asintoticamente al valore di saturazione 1, proprio come succede per la soluzione esatta $x(t)$. ∎