1 Equazioni differenziali a variabili separabili

Si consideri l'equazione differenziale $y'(x) = a(x)b(y)$, con:
$a : I \subseteq I\!R \to I\!R$ continua, I intervallo
$b : J \subseteq I\!R \to I\!R$ continua con derivata prima continua, J intervallo
L'equazione differenziale data , in queste ipotesi, ha naturalmente soluzioni, definite su opportuni intervalli, perché il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = a(x)b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

ha esistenza e unicità della soluzione (almeno in piccolo) comunque sia dato $(x_0, y_0) \in I\times \overset{\circ}{J}$[1]
Ci proponiamo di determinare le soluzioni dell'equazione differenziale mediante integrazioni.
Innanzi tutto osserviamo che se $\bar{y} \in J$ è t.c. $b(\bar{y}) = 0$, allora la funzione costante $y(x) = \bar{y}$ è soluzione dell'equazione differenziale proposta su tutto I (verifica immediata).
Quindi, ad ogni "zero" della funzione b è associata una soluzione, costante, dell'equazione. D'altro canto, il teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy ci permette di dire che: se y è una soluzione dell'equazione, definita su un certo intervallo $S \subseteq I$, tale che in almeno un punto $x \in S$ non renda nullo $b(y(x))$, allora $b(y(x))$ sarà sempre diverso da zero su S. Infatti, se $y(x)$ fosse tale da annullare b in qualche punto $\bar{x}$, vorrebbe dire che $y(\bar{x}) = \bar{y}$ è tale che $b(\bar{y}) = 0$. Ma allora il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = a(x)b(y) \\ y(\bar{x}) = \bar{y} \end{cases}$$

avrebbe due soluzioni distinte: la funzione $y(x)$ in questione e la funzione costantemente uguale ad $\bar{y}$.
Pertanto, se $y(x)$ è una soluzione su $S \subseteq I$, o è $b(y(x)) = 0 \quad \forall x \in S$, oppure $b(y(x)) \neq 0$ su tutto S: in quest'ultimo caso si avrà sempre $b(y(x)) > 0$ su tutto S oppure $b(y(x)) < 0$ su tutto S (altrimenti si avrebbe una contraddizione con il teorema degli zeri).
Risolviamo ora effettivamente l'equazione differenziale. Per quanto detto sopra, ci limiteremo a cercare le soluzioni $y(x)$ tali che $b(y(x)) \neq 0 \quad \forall x \in S$. Più precisamente, abbiamo che $\{y(x) : x \in S\}$ sarà un intervallo K contenuto in J nel quale b mantiene un segno costante,
Da $y'(x) = a(x)b(y(x)) \quad \forall x \in S$, segue:

$$\frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x) \quad \forall x \in S, \text{ da cui}$$

[1]Qui $\overset{\circ}{J}$ sta ad indicare l'insieme dei punti interni di J.

$$\int \frac{y'(x)}{b(y(x))} dx = \int a(x) dx$$

Effettuiamo nell'integrale indefinito a primo membro la sostituzione $t = y(x)$.

$$\left(\int \frac{dt}{b(t)} \right)_{t=y(x)} = \int a(x) dx$$

Se $A(x)$ e $B(t)$ sono due primitive, rispettivamente di a su S e di $1/b$ su K, si ha:

$$(B(t))_{t=y(x)} = A(x) + c \qquad (c \text{ costante reale}), \text{ ovvero:}$$

$$B(y(x)) = A(x) + c \tag{2}$$

Ma $B'(t) = 1/b(t)$ conserva su K segno costante, pertanto B è strettamente crescente su K e quindi invertibile. Se B^{-1} indica l'inversa di B, si ha:

$$y(x) = B^{-1}(A(x) + c) \tag{3}$$

Con il procedimento sopra indicato si ottengono tutte le soluzioni dell'equazione a variabili separabili, anche se occorre tenere presente che bisognerà usare tante funzioni inverse di B quanti sono gli intervalli su cui b ha segno costante.

Esempio 1.1 $y' = \sin y$
E' $\sin(y) = 0 \Leftrightarrow y = k\pi$. Quindi le funzioni costanti $y(x) = k\pi$ sono soluzioni dell'equazione $\forall k \in \mathbb{Z}$. Per il resto, abbiamo:

$$\frac{y'(x)}{\sin(y(x))} = 1 \qquad \text{da cui} \qquad \int \frac{y'(x)}{\sin(y(x))} dx = \int dx$$

Pertanto:

$$\left(\int \frac{dt}{\sin(t)} \right)_{t=y(x)} = x + c$$

Se $y(x) = t \in]2h_0\pi, (2h_0 + 1)\pi[$, abbiamo:

$$\left[\log \left(\tan \frac{t}{2} \right) \right]_{t=y(x)} = x + c$$

$$\left[\log \left(\tan \frac{y(x)}{2} \right) \right] = x + c$$

$$\tan \left(\frac{y(x)}{2} \right) = e^{x+c}$$

$$y(x) = 2 \left(\arctan(e^{x+c}) + h_0\pi \right)$$

(è opportuno tenere presente che l'inversa di $v = \tan u$ in $]h_0\pi, h_0\pi + \pi/2[$ è $u = \arctan v + h_0\pi$).
Analogamente, se $y(x) = t \in](2h_0 - 1)\pi, 2h_0\pi[$, si ha:

$$\left[\log\left(-\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right]_{t=y(x)} = x + c$$

$$\left[\log\left(-\tan\left(\frac{y(x)}{2}\right)\right)\right] = x + c$$

$$-\tan\left(\frac{y(x)}{2}\right) = e^{x+c}$$

$$y(x) = 2\left(\arctan(-e^{x+c}) + h_0\pi\right)$$

Graficamente, le soluzioni sono:

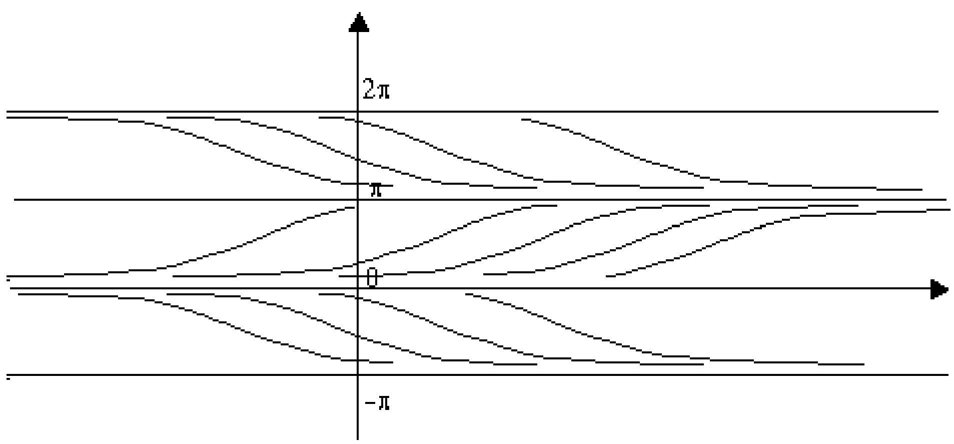

Figura 12.1

Osserviamo che essendo l'equazione differenziale *autonoma* (cioé il secondo membro $f(x, y)$ non dipende esplicitamente dalla variabile indipendente x), il grafico risulta invariante rispetto a traslazioni nel senso delle x.
Nel caso in cui si abbia da risolvere un problema di Cauchy come (1) associato ad una equazione a variabili separabili, si puó procedere in due modi. Un modo consiste nell'utilizzare la formula (2) che dá le soluzioni dell'equazione, da cui si ricava $C = B(y_0) - A(x_0)$; é importante ricordare che poi per passare alla forma esplicita (3) occorre usare l'inversa di B sull'intervallo K individuato dal fatto che contiene y_0.

Un altro modo consiste nel risolvere l'equazione usando l'integrazione definita da:

$$\frac{y'(x)}{b((y(x))} = a(x) \qquad \forall x \in S, \text{ segue}$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(s)}{b((y(s))} ds = \int_{x_0}^{x} a(s) ds$$

(la lettera di integrazione é stata come al solito cambiata per evitare di fare confusione con la variabile x).
Anche qui, usiamo la sostituzione $t = y(s)$:

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dt}{b(t)} = \int_{x_0}^{x} a(s) ds \qquad \text{da cui} \qquad B\left(y(x)\right) - B\left(y(x_0)\right) = A(x) - A(x_0)$$

Ovvero (ricordiamo che $y(x_0) = y_0$): $B\left(y(x)\right) = A(x) + B\left(y(x_0)\right) - A(x_0)$.
Se poi B^{-1} é l'inversa di B sull'intervallo che contiene y_0. $\quad y(x) = B^{-1}\left(A(x) + B(y_0) - A(x_0)\right)$

Esempio 1.2 Utilizziamo ancora l'equazione giá risolta prima:

$$\begin{cases} y' = \sin y \\ y(0) = \frac{11}{2}\pi \end{cases}$$

Seguendo la prima strada: $y(0) = y_0 = \frac{11}{2}\pi \in](2h_0 - 1)\pi, 2h_0\pi[$ per $h_0 = 3$.
Quindi, $\log\left(-\tan(\frac{11}{4}\pi)\right) = 0 + c$.
Ovvero: $c = \log\left(-\tan(\frac{-\pi}{4})\right) = \log(\tan\frac{\pi}{4}) = \log 1 = 0$.
Pertanto, $y(x) = 2\left(\arctan(-e^x) + 3\pi\right)$.

Seguendo la seconda strada:

$$\int_{0}^{x} \frac{y'(s)}{\sin\left(y(s)\right)} ds = \int_{0}^{x} 1 ds$$

Ovvero:

$$\int_{\frac{11}{2}\pi}^{y} \frac{dt}{\sin t} = x$$

Poiché $\sin\frac{11}{2}\pi < 0$, abbiamo:

$$\log(-\tan\frac{t}{2})]_{\frac{11}{2}\pi}^{y} = x$$

Ossia:

$$\log(-\tan\frac{y}{2}) = x + \log\left(-(\tan\frac{11}{4}\pi)\right)$$

Cioé:

$$\log(-\tan\frac{y}{2}) = x$$

Ovvero:

$$\tan \frac{y}{2} = -e^x$$

Da cui

$$\frac{y}{2} = \arctan(-e^x) + 3\pi$$

Ovvero

$$y(x) = 2\left(arctan(-e^x) + 3\pi\right)$$

VERIFICA:

$$y(0) = 2\left(\arctan(-1) + 3\pi\right) = 2(-\frac{\pi}{4} + 3\pi) = \frac{11}{2}\pi$$

$$y'(x) = 2\frac{-e^x}{1+e^{2x}}$$

$$\sin y(x) = \sin\left[2(\arctan(-e^x) + 3\pi)\right]$$

Le ultime 2 equazioni DOVREBBERO ESSERE UGUALI!!!
Lo sono in effetti, basta usare la relazione

$$\sin \alpha = \frac{2\tan \alpha/2}{1+\tan^2 \alpha/2}$$

$$\sin\left(y(x)\right) = \frac{2\tan[\arctan(-e^x) + 3\pi]}{1+\tan^2[\arctan(-e^x) + 3\pi]} = \frac{2\tan[\arctan(-e^x)]}{1+\tan^2\arctan(-e^x)]} = \frac{-2e^x}{1+e^{2x}}$$

■