# Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Risolviamo un caso importante: una equazione lineare del primo ordine.

$$y' = a(x)y$$

Si può usare il metodo di soluzione per le equazioni a variabili separabili per trovare una soluzione. Che quindi non cade più dal cielo.

Ma possiamo anche verificare che, scelto arbitrariamente $\alpha \in \mathbb{R}$ (se abbiamo pb di Cauchy conviene scegliere $\alpha = x_0$):

$$y(x) = c \exp(\int_\alpha^x a(t)\, dt)$$

è soluzione per ogni valore di $c \in \mathbb{R}$

Possiamo osservare che una c.l. di soluzioni è ancora soluzione.

Vediamo come possiamo anche calcolare la soluzione di una equazione "non omogenea"

$$y' = a(x)y + b(x)$$

Cerco una soluzione del tipo $\psi\phi$ dove $\phi$ è soluzione dell'omogenea associata.

E':

$$\frac{d}{dx}\,[\phi(x)\psi(x)] = \phi'(x)\psi(x) + \phi(x)\psi'(x)$$

Noi vogliamo sia:

$$\frac{d}{dx}\,[\phi(x)\psi(x)] = \phi'(x)\psi(x) + \phi(x)\psi'(x) = a(x)\phi(x)\psi(x) + b(x)$$

Ma $\phi' = a\phi$

Ciò vuol dire che deve essere:

$$\phi(x)\psi'(x) = b(x)$$

Cioè:

$$\psi'(x) = \frac{b(x)}{\phi(x)}$$

Una soluzione della quale si ottiene semplicemente integrando:

$$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} b(t) \exp(\int_{x_0}^{t} -a(s)\, ds)\, dt$$

E allora una soluzione è:

$$\phi(x)\psi(x) = \phi(x) \int_{x_0}^{x} b(t) \exp(\int_{x_0}^{t} -a(s)\, ds)\, dt =$$

$$= \exp(\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt) \left[ \int_{x_0}^{x} b(t) \exp(\int_{x_0}^{t} -a(s)\, ds)\, dt + y_0 \right]$$