Equazioni differenziali lineari

Una equazione differenziale lineare del secondo ordine è:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) \tag{1}$$

Se le funzioni a_1, a_2 sono definite e continue su un intervallo I ed $x_0 \in I$, allora il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y & = & b(x) \\ y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_1 \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione.

L'equazione:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{2}$$

viene detta omogenea (o anche "omogenea associata" se si intende fare riferimento alla (1)).

Si può dimostrare che l'insieme delle soluzioni di (2) è uno spazio vettoriale di dimensione due. Quindi è sufficiente trovare due soluzioni ϕ_1, ϕ_2 linearmente indipendenti di (2) per determinarne tutte le soluzioni, che saranno della forma $c_1\phi_1 + c_2\phi_2$.

L'insieme delle soluzioni di (1), ovvero di (2), viene chiamato usualmente "integrale generale".

Per ottenere tutte le soluzioni di (1), occorre determinare una soluzione ϕ_b di (1), dopo di che tutte le soluzioni sono del tipo $\phi_0 + \phi_b$, dove ϕ_0 è una soluzione di (2).

Pertanto, l'integrale generale di (2) è:

$$c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \phi_b(x)$$

dove ϕ_1 e ϕ_2 sono soluzioni di (2) linearmente indipendenti tra loro e ϕ_b è una qualsiasi soluzione di (1).

Se l'equazione (2) è a *coefficienti costanti*, possiamo trovare le soluzioni risolvendo l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

Distinguiamo tre casi:

- l'equazione caratteristica ha due soluzioni λ_1, λ_2 reali e distinte. Allora l'equazione (2) ha due soluzioni linearmente indipendenti che sono: $\phi_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $\phi_2(x) = e^{\lambda_2 x}$

- l'equazione caratteristica ha una soluzione $\hat{\lambda}$ reale, di molteplicità 2. Allora l'equazione (2) ha due soluzioni linearmente indipendenti che sono: $\phi_1(x) = e^{\hat{\lambda} x}$, $\phi_2(x) = xe^{\hat{\lambda} x}$

- l'equazione caratteristica ha due soluzioni complesse λ_1, λ_2. Poiché esse sono necessariamente coniugate, avremo $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$. Allora l'equazione (2) ha due soluzioni linearmente indipendenti che sono: $\phi_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $\phi_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

Tutto quanto abbiamo visto per le equazioni del secondo ordine si può generalizzare alle equazioni di ordine n.