1 Dipendenza continua dai dati della soluzione di un problema di Cauchy. Lemma di Gronwall

Ci occuperemo del problema della dipendenza continua dai dati della soluzione di un problema di Cauchy.
Alla dimostrazione del risultato premettiamo alcune considerazioni generali, che verranno illustrate facendo riferimento ad un esempio specifico.
Sia dato un pendolo di lunghezza L che si muove in un campo gravitazionale costante g. Ci occuperemo del seguente problema: quale è la velocità angolare quando il pendolo passa per la prima volta per la posizione verticale, se è lasciato partire, in quiete, da un certo angolo θ_0?

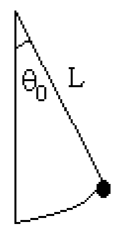

Figura 13.1

Effettuando le usuali ipotesi e semplificazioni, otteniamo che il moto del pendolo è descritto dal seguente sistema (problema di Cauchy):

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{L}\sin\theta = 0 \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \dfrac{d\theta}{dt}(0) = 0 \end{cases}$$

E' chiaro che è importante sapere se questo problema ha esistenza ed unicità della soluzione.
Esistenza: se non c'è soluzione, certo questo modello matematico del pendolo non ci permette di rispondere alla domanda. In generale la non esistenza è legata alla presenza di "troppe condizioni rispetto ai gradi di libertà".
Unicità: anche la mancanza di unicità della soluzione non ci permette di rispondere al problema formulato. Usualmente la non unicità della soluzione di un problema indica che è sottodeterminato ("più incognite che equazioni"): ovverossia, non si è tenuto conto di alcune condizioni che intervengono in modo essenziale.
Nel nostro problema specifico, possiamo applicare il teorema di esistenza ed unicità, trasformando l'equazione in un sistema equivalente: si verifica facilmente come la soluzione del problema di Cauchy esista, sia unica ed anzi la

soluzione massimale sia definita su tutto $I\!R$.
In altre parole, è definito il moto per $t \in [0, +\infty[$[1] Abbiamo quindi la possibilità di dare una risposta univoca al problema prospettato.
Non possiamo considerarci soddisfatti, però. E non solo per il fatto che non abbiamo detto nulla su come si possa effettivamente trovare la soluzione del problema, cosa di cui ci occuperemo dopo. A questo punto, infatti, sappiamo (almeno teoricamente) determinare $\frac{d\theta}{dt}\big|_{\theta=0}$ se sono dati *esattamente* $\theta(0) = \theta_0$ e $\frac{d\theta}{dt}\big|_0 = 0$.
Ma nessuno è in grado di far partire un pendolo esattamente dall'angolo θ_0. E neanche esattamente in quiete.

Sia quindi dato $\theta(0) = \tilde{\theta}_0$ e $\frac{d\theta}{dt}(0) = \tilde{\theta}_1$ Possiamo ancora applicare il teorema di esistenza ed unicità ed avere quindi $\tilde{\theta}(t)$, definita di nuovo in tutto $I\!R$, soluzione del nuovo problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{L}\sin\theta = 0 \\ \theta(0) = \tilde{\theta}_0 \\ \dfrac{d\theta}{dt}(0) = \tilde{\theta}_1 \end{cases} \tag{1}$$

Si pone quindi la questione: dato $\tilde{\theta}_0 \approx \theta_0$ e $\tilde{\theta}_1 \approx 0$, per la soluzione $\tilde{\theta}(t)$ si ha $\frac{d\tilde{\theta}}{dt}\big|_{\tilde{\theta}=0} \approx \frac{d\theta}{dt}\big|_{\theta=0}$?
Possiamo rappresentare l'equazione differenziale come una macchinetta che ai dati iniziali associa la soluzione. E poi della soluzione ci interessa il valore $\frac{d\theta}{dt}$ per $\theta = 0$. Si ha quindi:

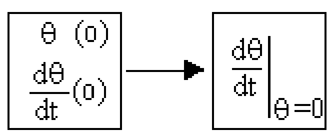

Figura 13.2

Ovverossia, una applicazione che alla coppia $\left(\theta(0), \frac{d\theta}{dt}(0)\right) \in I\!R^2$ associa $\frac{d\theta}{dt}\big|_{\theta=0} \in I\!R$.
Possiamo tradurre la questione in termini matematici precisi chiedendoci se questa applicazione è *continua*.
Un altro problema, sempre legato al moto del pendolo, avrebbe potuto essere: dato $\theta(0)$ e $\frac{d\theta}{dt}(0)$, trovare la legge oraria $\theta(t)$ per $t \in [0, 1]$ (anziché

[1] Il moto è anche definito per $t \in]-\infty, 0]$. Ciò significa che se il pendolo si è trovato all'istante $t = 0$ nella posizione θ_0 e con $\frac{d\theta}{dt} = 0$ nel corso di oscillazioni che avvenivano da un tempo precedente all'istante $t = 0$, siamo in grado di ricostruire la storia passata del pendolo.

interessarci semplicemente a $\frac{d\theta}{dt}\big|_{\theta=0}$).
Questa volta abbiamo:

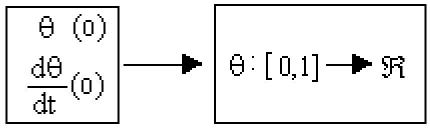

Figura 13.3

Cioè una applicazione $S : I\!R^2 \to \mathcal{C}^1([0,1])$, che a $(\theta(0), \frac{d\theta}{dt}(0)) \in I\!R^2$ associa $\theta : [0,1] \to I\!R$, elemento di $\mathcal{C}^1([0,1])$. Ci si può chiedere se S è continua. Ma *quale metrica* mettiamo su $\mathcal{C}^1([0,1])$? La metrica della convergenza uniforme, o quella che considera lo scarto quadratico medio ($d_2(\theta, \tilde{\theta}) = \left\{ \int_0^1 \left[\theta(t) - \tilde{\theta}(t) \right]^2 dt \right\}^{1/2}$). o quale altra ancora? Dipende da quali proprietà della soluzione ci interessano, ed anche dal tipo di approssimazione con la quale siamo interessati a conoscere la soluzione.
Abbiamo sviscerato il problema? Abbiamo parlato di esistenza ed unicità della soluzione e di dipendenza continua dai dati. Basta così ? No. E' importante anche la "*dipendenza continua dall'equazione*". Cosa significa? Un modo per affrontare il problema può essere il seguente (sempre riferito al pendolo). Abbiamo un'equazione del tipo $\frac{d^2\theta}{dt^2} = f(t, \theta, \frac{d\theta}{dt})$.
Se cambiamo f con $\tilde{f}$, funzione regolare, con $f \simeq \tilde{f}$, abbiamo una nuova equazione $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \tilde{f}(t, \theta, \frac{d\theta}{dt})$.
Consideriamo:

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta}{dt^2} = f(t, \theta, \frac{d\theta}{dt}) \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \frac{d\theta}{dt}(0) = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta}{dt^2} = \tilde{f}(t, \theta, \frac{d\theta}{dt}) \\ \theta(0) = \tilde{\theta}_0 \\ \frac{d\theta}{dt}(0) = \tilde{\theta} \end{cases}$$

Siano $\theta(t)$ e $\tilde{\theta}(t)$ rispettivamente le soluzioni dei due problemi di Cauchy. Sará ancora $\frac{d\theta}{dt}\big|_{\theta=0} \simeq \frac{d\tilde{\theta}}{dt}\big|_{\tilde{\theta}=0}$?
Ma cosa vuol dire cambiare f con $\tilde{f}$? Facciamo un esempio concreto: nello scrivere l'equazione del pendolo, abbiamo trascurato l'attrito. Se ne tenessimo conto (almeno in modo semplificato, supponendolo proporzionale alla velocitá), l'equazione differenziale diventerebbe:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta - \frac{k}{n}\frac{d\theta}{dt} = \tilde{f}(t, \theta, \frac{d\theta}{dt})$$

Se $\frac{k}{n} \simeq 0$, é $\tilde{f} \simeq f$. In altre parole, se anziché non esserci assolutamente attrito, supponiamo che esso sia molto piccolo, si avrá ancora $\frac{d\theta}{dt}\big|_{\theta=0} \simeq \frac{d\tilde{\theta}}{dt}\big|_{\tilde{\theta}=0}$?
L'interesse a sostituire f con $\tilde{f}$ puó essere peró di tutt'altro tipo. Potremmo essere tentati di sostituire l'equazione data con questa: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$. Questa volta le ragioni per fare questo passo non hanno nulla di fisico, ma sono matematiche: si sostituisce all'equazione data una piú semplice, piú facile da risolvere.
Concludendo, appare ragionevole richiedere per un problema tradotto matematicamente da un problema di Cauchy l'esistenza e l'unicitá della soluzione , nonché la dipendenza continua della soluzione dai dati iniziali e dal secondo membro dell'equazione differenziale [2].
Dimostriamo pertanto un teorema di dipendenza continua dai dati e dal secondo membro dell'equazione . Premettiamo a tale risultato il notevole

Lemma 1.1 *(di Gronwall). Sia $\varphi : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, continua, sia $K \geq 0$, sia inoltre $z : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continua e ≥ 0.*
Se é $\varphi(x) \leq K + \int_a^x \varphi(t)z(t)dt \forall x \in [a,b[$, allora é:

$$\varphi(x) \leq K e^{\int_a^x z(t)dt}$$

Dimostrazione. Sia $\Psi(x) = K + \int_a^x \varphi(t)z(t)dt$. Per ipotesi si ha $\varphi(x) \leq \Psi(x)$. Inoltre $\Psi(a) = K$. É $\Psi'(x) = \varphi(x)z(x) \leq \Psi(x)z(x)$.
Cioé $\Psi'(x) \leq \Psi(x)z(x)$. Moltiplichiamo la disuguaglianza per $e^{-\int_a^x z(t)dt}$: $\Psi'(x)e^{-\int_a^x z(t)dt} \leq \Psi(x)z(x)e^{-\int_a^x z(t)dt}$. Allora é $\frac{d}{dx}\left[\Psi(x)e^{-\int_a^x z(t)dt}\right] \leq 0$. Se integriamo ambo i membri da a a x troviamo: $\Psi(x)e^{-\int_a^x z(t)dt} - \Psi(a) \leq 0$. Da cui $\Psi(x) \leq \Psi(a)e^{\int_a^x z(t)dt}$ Essendo (vedi sopra) $\varphi(x) \leq \Psi(x)$ e $\Psi(a) = K$, si ottiene : $\varphi(x) \leq K e^{\int_a^x z(t)dt}$.
C.V.D. ∎

Si consideri $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$. Sia $f : R \to \mathbb{R}$ con f ed f_y continue. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

esiste ed é unica ed é definita (almeno) su $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, con $\delta = \min(a, \frac{b}{M})$, essendo M il massimo di $|f|$ su R.
Si consideri ora: $\tilde{f} : R \to \mathbb{R}$, con $\tilde{f}$ ed $\tilde{f}_y$ continue.
Proviamo innanzitutto che se: $|x_0 - \tilde{x}_0| \leq \sigma$, $|y_0 - \tilde{y}_0| \leq \sigma$, $|f(x,y) - \tilde{f}(x,y)| \leq \sigma$ allora la soluzione $\tilde{y}$ del problema

$$\begin{cases} y' = \tilde{f}(x,y) \\ y(\tilde{x_0}) = \tilde{y}_0 \end{cases} \tag{2}$$

[2]Sia chiaro che la discussione precedente é estremamente sintetica e ben lungi dall'essere completa. Per qualche estensione vedasi : F. Brauer e J.A. Nobel:"Ordinary differential Equation" Editore W.A. Benjamin

é definita (almeno) su $]x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}[$, pur di prendere σ abbastanza piccolo. Infatti, per il teorema di esistenza e unicitá applicato al problema (2), si ha che $\tilde{y}$ é definita su $]\tilde{x}_0 - \tilde{\delta}, \tilde{x}_0 + \tilde{\delta}[$ con $\tilde{\delta} = \min\left\{a - |x_0 - \tilde{x}_0|, \frac{b - |y_0 - \tilde{y}_0|}{\tilde{M}}\right\} \geq \min\left\{a - \sigma, \frac{b-\sigma}{M+\sigma}\right\}$. É evidente che per $\sigma \to 0$ é $\tilde{\delta} \to \delta$; ancora piú ovvio é che $\tilde{x}_0 \to x_0$ se $\sigma \to 0$. Esisterá quindi, σ_1, tale che per $\sigma < \sigma_1$, si ha che $]\tilde{x}_0 - \tilde{\delta}, \tilde{x}_0 + \tilde{\delta}[\in]x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}[$.
Effettuata questa premessa, possiamo enuciare (e dimostrare) il seguente risultato.

Teorema 1.1 *Sia dato $R = [x_0 - a, x_0 + a] * [y_0 - b, y_0 + b]$. Siano $f, \tilde{f} I\!R \to I\!R$ con $f, \tilde{f}, f_y, \tilde{f}_y$ continue. Sia M il massimo di $|f|$ su R e A il massimo di $|f_y|$ su R. Sia $\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$. Allora, $\forall \epsilon > 0\ \exists \sigma > 0$ tale che se $|x_0 - \tilde{x}_0| \leq \sigma, |y_0 - \tilde{y}_0| \leq \sigma, |f(x,y) - \tilde{f}(x,y)| \leq \sigma \forall (x,y) \in I\!R$, allora le soluzioni y e $\tilde{y}$ dei rispettivi problemi di Cauchy sono definite entrambe (almeno) su $]x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}[$ e si ha $|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq \epsilon\ \forall x \in]x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}[$.*

Dimostrazione. In seguito alla discussione precedente, abbiamo che tanto y quanto $\tilde{y}$ sono definite su $]x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}[$ pur di prendere $\sigma < \sigma_1$. Si ha, $\forall x \in]x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}[$:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right) dt$$
$$\tilde{y}(x) = \tilde{y_0} + \int_{\tilde{x}_0}^{x} \tilde{f}\left(t, y(t)\right) dt$$

Sia $x \in [x_0, x_0 + \frac{\delta}{2}[$. Si ha (facendo la differenza membro a membro e prendendo i valori assoluti):

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq |y_0 - \tilde{y}_0| + \left| \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right) dt + - \int_{\tilde{x}_0}^{x} \tilde{f}\left(t, \tilde{y}(t)\right) dt \right|$$
$$\leq |y_0 - \tilde{y}_0| + \left| \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right) dt - \int_{\tilde{x_0}}^{x_0} \tilde{f}\left(t, \tilde{y}(t)\right) - \int_{x_0}^{x} \tilde{f}\left(t, \tilde{y}(t)\right) dt \right|$$
$$\leq |y_0 - \tilde{y_{,0}}| + \left| \int_{\tilde{x_0}}^{x_0} |\tilde{f}\left(t, \tilde{y}(t)\right)| dt \right| + \int_{x_0}^{x} |f\left(t, y(t)\right) - \tilde{f}\left(t, \tilde{y}(t)\right)| dt \leq$$

(Essendo $|\tilde{f}| \leq M + \sigma$)

$$\sigma + \sigma(M + \sigma) + \int_{x_0}^{x} |f\left(t, y(t)\right) - \tilde{f}\left(t, \tilde{y}(t)\right) dt|$$
$$\leq \sigma(M + 1 + \sigma) + \int_{x_0}^{x} |f\left(t, y(t)\right) - f\left(t, \tilde{y}(t)\right)| dt + \int_{x_0}^{x} |f\left(t, \tilde{y}(t)\right) - \tilde{f}\left(t, \tilde{y}(t)\right)| dt$$
$$\leq \sigma(M + 1 + \sigma) + \int_{x_0}^{x} |f\left(t, y(t)\right) - f\left(t, \tilde{y}(t)\right)| dt + \sigma^2$$
$$\leq \sigma(M + 1 + 2\sigma) + \int_{x_0}^{x} A|y(t) - \tilde{y}(t)| dt$$

Sia $\varphi(x) = |y(x) - \tilde{y}(x)$. Abbiamo provato che é $\varphi(x) \leq \sigma(M + 1 + 2\sigma) + \int_{x_0}^{x} A\varphi(t)dt$. Per il lemma di Gronwall:$\varphi(x) \leq \sigma(M + 1 + 2\sigma)e^{A(x-x_0)} \leq \sigma(M+1+2\sigma)e^{A\sigma}$. Quindi $|y(x)-\tilde{y}(x)| \leq \sigma(M+1+2\sigma)e^{A\sigma}$ 'E evidente che il secondo membro puó essere reso $< \epsilon$ pur di prendere σ sufficientemente piccolo. Abbiamo quindi, provato che é $|y(x)-\tilde{y}(x)| \leq \epsilon \; \forall x \in [x_0, x_0+\frac{\sigma}{2}[$. ■

Con la stessa procedura si dimostra il risultato per $x \in]x_0 - \frac{\sigma}{2}, x_0]$: naturalmente per tale dimostrazione si userá una versione del lemma di Gronwall “a sinistra”, che si enuncia e dimostra anch'essa analogamente alla versione “a destra” di tale lemma.