Dipendenza continua dai dati della soluzione di un problema di Cauchy. Esempi preliminari

Queste note costituiscono una introduzione alla trattazione del problema generale. Le problematiche della dipendenza continua dai dati (ed altro) verranno illustrate facendo riferimento ad esempi specifici.

Come prima cosa facciamo due conti, nel caso più semplice possibile:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

La soluzione di questo problema è $y_0 \exp(x - x_0)$.
Questa può essere vista come funzione di tre variabili: x, x_0, y_0. Possiamo notare che è una funzione continua in queste tre variabili. Anzi, è derivabile parzialmente rispetto a tutte queste variabili, e fino all'ordine che vogliamo. Pertanto, è una funzione molto regolare, in particolare come funzione dei dati iniziali.
Se chiamiamo F questa funzione di tra variabili, cioè $F(x, x_0, y_0) = y_0 \exp(x - x_0)$, possiamo osservare graficamente o analiticamente che:

$$F(\bar{x}, x_0, \bar{y}_0) > F(\bar{x}, x_0', \bar{y}_0) \quad \Leftrightarrow \quad x_0 < x_0'$$

ovverossia, la F è strettamente decrescente nella seconda variabile (x_0), tenendo le altre fisse.

Possiamo anche osservare, avendo la formula esplicita per F che F è una funzione continua nella coppia di variabili (x_0, y_0), per ogni fissato x, che è uno dei tanti modi possibili coi quali possiamo esprimere la dipendanza continua della soluzione dai dati.

Ma, avendo la formula per F, possiamo anche andare avanti e studiare la "sensitività" di F rispetto ai dati.

Calcoliamo:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, x_0, y_0) = y_0 \exp(x - x_0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(x, x_0, y_0) = -y_0 \exp(x - x_0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_0}(x, x_0, y_0) = \exp(x - x_0)$$

In particolare, per $x = x_0$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, x_0, y_0) = y_0 \exp(x_0 - x_0) = y_0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(x_0, x_0, y_0) = -y_0 \exp(x_0 - x_0) = -y_0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_0}(x_0, x_0, y_0) = \exp(x_0 - x_0) = 1$$

Cosa vuol dire? In particolare, le due ultime mi dicono che se vario di poco la x_0, diciamo di Δ, i valori della soluzione del problema di Cauchy varieranno, nel punto iniziale x_0, approssimativamente di una quantità pari a $-y_0 \cdot \Delta$. Se invece vario di poco la y_0, diciamo sempre di Δ, la soluzione nel punto x_0 varierà all'incirca di Δ (a pensarci bene, è ovvio che debba essere così)!

Si può anche considerare un caso un po' più generale:

$$\begin{cases} y' = ay + b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

La soluzione è:

$$\left(y_0 + \frac{b}{a}\right) \exp(a(x - x_0)) - \frac{b}{a}$$

Questa volta abbiamo una funzione di 5 variabili: $F(x, x_0, y_0, a, b) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) \exp(a(x - x_0)) - \frac{b}{a}$.

Questa funzione è definita su tutto $\mathbb{R}^5$ eccettuato che per $a = 0$. E' un esercizio interessante analizzare cosa succede se $a = 0$. In particolare, se è vero oppure no che la soluzione tende (in che senso?) alla solzione di:

$$\begin{cases} y' = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Altro esempio:

$$\begin{cases} y'' = -\frac{k}{m} y \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Possiamo evidenziare il fatto che la soluzione dipenda anche dal dato "secondo membro dell'equazione differenziale", scrivendo la soluzione come

$F(x, x_0, y_0, y_1, k, m)$. Volendo, si potrebbe anche pensare di modificare ulteriormente il problema, considerando l'attrito oppure no, o un attrito maggiore o minore (qui pensiamo ad un attrito ti tipo viscoso, e supponiamo che il moto si svolga dentro un fluido (aria, acqua) che è fermo, altrimenti la forza di attrito viscoso è proporzionale alla differenza tra la velocità della molla e la velocità con cui si muove il fluido):

$$\begin{cases} y'' = -\frac{k}{m}y - -\frac{h}{m}y' \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Occupiamoci però solo del primo caso, per semplicità.
Anzi, per evitarci troppi conti immaginiamo di voler studiare il comportamento di F quando il dato iniziale (y_0, y_1) sia vicino a $(0, 0)$ e il punto iniziale sia fissato e pari a 0 (cioè, $x_0 = 0$). E':

$$F(x, 0, y_0, y_1, k, m) = y_0 \cdot \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}x) + y_1 \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}x)$$

Si osservi che F da un punto di vista matematico è definita per tutti i valori di k, m che abbiano segno discorde. Ma ciò non corrisponde al fenomeno che intendiamo modellizzare. Quindi, anche se la formula ha senso per altri valori di k ed m, noi la considereremo solo per valori *positivi* di queste variabili!

Abbiamo che per $y_0 = y_1 = 0$ è:

$$F(x, 0, y_0, y_1, k, m) = 0$$

ovverossia, la molla non si muove per niente.

Abbiamo che per $y_1 = 0$ è:

$$F(x, 0, y_0, 0, k, m) = y_0 \cdot \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}x)$$

E quindi la molla fa delle oscillazioni "piccole" se y_0 è "piccolo". Infatti la max elongazione della molla è pari a $|y_0|$.

Abbiamo che per $y_0 = 0$ è:

$$F(x, 0, 0, y_1, k, m) = y_1 \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}x)$$

E quindi anche in questo caso la molla ha delle oscillazioni. Ma stavolta se e quanto sono piccole dipende, oltre che da y_1 (ovverossia, la velocità con la quale la facciamo partire), anche da k ed m. Per meglio dire, dal loro rapporto. Una costante di elasticità piccola a parità di massa e di y_1 fa sì che la molla compia delle oscillazioni più elevate.

Una ultima considerazione. Sia $F(x, x_0, y_0, y_1, k, m, h)$ la soluzione del problema con attrito. Ci potremmo chiedere se è vero che, per ogni x fissato in $\mathbb{R}$, si ha che:

$$\lim_{h \to 0} F(x, x_0, y_0, y_1, k, m, h) = F(x, x_0, y_0, y_1, k, m, 0)$$