Equazioni differenziali: esistenza ed unicità

Una equazione differenziale (odinaria, del primo ordine, in forma normale) è $y' = f(x,y)$, con $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $A \neq \emptyset$.

ATTENZIONE, $y' = f(x,y)$ è scrittura convenzionale. E' uno shortcut per indicare che si vuole trovare una funzione ϕ tale che ...: vedi sotto.

f è il dato.

Per soluzione si intende ϕ, funzione di UNA variabile, definita su un opportuno INTERVALLO (presa di posizione ideologica mia, che sia un intervallo[1]) I, t.c.:

$(x, \phi(x)) \in A \quad \forall x \in I$
$\phi'(x) = f(x, \phi(x)) \quad \forall x \in I$

"Normalmente" un'equazione differenziale ha infinite soluzioni. Occorrono le c.i. se si vuole sperare di averne una sola.
Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' & = & f(x,y) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Un problema di Cauchy è dato dalla "giustapposizione" di una equazione differenziale e di c.i. I dati di un problema di Cauchy sono quindi:
- f che è il dato dell'equazione differenziale
- x_0, y_0 che sono i dati delle c.i.

Le equazioni differenziali presentano difficoltà non banali.
Primo esempio:

$$\begin{cases} y' & = & 1 + y^2 \\ y(0) & = & 0 \end{cases} \tag{2}$$

Soluzione di (2) è $tg(x)$ ristretta su $]-\pi/2, \pi/2[$, che non ha più senso fuori di tale intervallo, nonostante l'equazione "abbia senso" su tutto $\mathbb{R}^2$.
E' anche unica, come vedremo a suo tempo. Si noti però che avviene un fatto

[1] Notiamo che un'equazione differenziale esprime un legame tra passato e futuro (questo aspetto è particolarmente evidente se si fissa la propria attenzione sulla fase di modellizzazione di un fenomeno mediante una equazione differenziale), che si attua attraverso una catena di passaggi temporali "infinitamente piccoli". In un problema di Cauchy vogliamo istruire questo "legame temporale" tra il dato iniziale e istanti successivi (o anche precedenti). Ma tutto ciò ha senso solo se si è su un intervallo.

curioso. Mentre la "dinamica del sistema" ha senso per ogni x (la funzione $f(x,y) = 1+y^2$ è definita e regolarissima su tutto $\mathbb{R}^2$), la soluzione però non è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ma solo su $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Si verifica così in questo caso il fenomeno cosiddetto della "esplosione in tempo finito" della soluzione.

Secondo esempio:

$$\begin{cases} y' &= 3\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) &= 0 \end{cases} \tag{3}$$

Nonostante che $f(x,y) = 3\sqrt[3]{y^2}$ sia definita e continua su tutto $\mathbb{R}^2$, ha più di una soluzione. E' immediato infatti verificare che la funzione x^3 e la funzione 0 (identicamente nulla, cioè) sono soluzioni[2].
Si noti che la funzione $f(x,y) = 3\sqrt[3]{y^2}$, pur essendo continua, non è però derivabile sull'asse delle x. Possiamo allora sperare che, imponendo una maggiore regolarità alla f, sia possibile garantire l'esistenza ed unicità della soluzione per un problema di Cauchy. Vedremo che, in effetti, così è.

Cominciamo con l'enunciare un risultato di esistenza ed unicità. Nei teoremi seguenti ci riferiremo sempre al problema di Cauchy (1).

Teorema 1 *Sia A un sottoinsieme aperto e non vuoto di $\mathbb{R}^2$, e sia $f \in \mathcal{C}^1(A)$. Allora, $\forall (x_0, y_0) \in A$ esiste un intervallo aperto I, con $x_0 \in I$, t.c. su I è definita una ed una sola funzione $\phi : I \to \mathbb{R}$, che sia soluzione di (1)*

L'esempio con $\tan(x)$ oltre a mostrare il fenomeno (che può essere sorprendente a prima vista) della "esplosione in tempo finito", ci ha fatto anche riflettere sul ruolo non banale dell' insieme di definizione della soluzione.

In un certo senso, doveva essere ovvio a priori che l'insieme di definizione fosse importante. Basta ricordarsi che una soluzione di una equazione differenziale è una *funzione* e che quindi come tale avrà il suo dominio e codominio. Ma mentre il codominio è sempre $\mathbb{R}$, il ruolo del dominio (o insieme di definizione) della funzione è rilevante.

Si noti che, se $\phi : I \to \mathbb{R}$ è soluzione di una equazione differenziale e se $J \subseteq I$, allora anche $\psi : J \to \mathbb{R}$, definita come $\phi|_I$ è anch'essa soluzione.

[2] In realtà ce ne sono infinite. Fissati arbitrariamente $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 \leq 0 x_2$, la funzione

$$\varphi(x) = \begin{cases} (x-x_1)^3 & x \leq x_1 \\ 0 & x_1 \leq x \leq x_2 \\ (x-x_2)^3 & x_2 \leq x \end{cases}$$

è soluzione del problema di Cauchy.

Questo fatto ci richiederà di fare attenzione nel parlare di *unicità* della soluzione di un problema di Cauchy.

Gli approcci ragionevoli che abbiamo a disposizione per risolvere correttamente questa difficoltà sono due:

- specificare che *su un dato intervallo* è definita una ed una sola funzione che risolve il problema di Cauchy.

- individuare, se possibile, "il più grande intervallo" nel quale sia definita una soluzione del problema di Cauchy (parleremo di soluzioni "massimali").

Quello che abbiamo usato nell'enunciato del teorema è il primo. In realtà nelle stesse ipotesi si ha anche unicità della soluzione massimale.

Per soluzione massimale si intende una soluzione che non è prolungabile in modo da essere ancora soluzione. Formalmente, è una funzione $\phi : I \to \mathbb{R}$ tale che:
- è soluzione (e ci mancherebbe!)
- non esiste J, $J \supseteq I$, $J \neq I$, $\psi : J \to \mathbb{R}$ con ψ soluzione dell'equazione differenziale e con $\psi|_I = \phi$

Teorema 2 *Sia A un sottoinsieme aperto e non vuoto di $\mathbb{R}^2$, e sia $f \in \mathcal{C}^1(A)$. Allora, $\forall (x_0, y_0) \in A$ esiste una ed una sola solzione massimale di (1)*

E' anche importante garantire l'esistenza di soluzioni "in grande": vediamo un teorema in proposito.

Teorema 3 *Sia L un intervallo aperto non vuoto di $\mathbb{R}$ e sia $f \in \mathcal{C}^1(L \times \mathbb{R})$. Allora, $\forall x_0 \in L$ la soluzione massimale di (1) è definita su tutto L se è soddisfatta una delle due condizioni seguenti:*

- *f è limitata su $L \times \mathbb{R}$*
- *$\frac{\partial f}{\partial y}$ è limitata su $L \times \mathbb{R}$*

Osserviamo che nei teoremi enunciati potevamo fare ipotesi meno forti. Bastava:

Teorema 4 *Sia A un sottoinsieme aperto e non vuoto di $\mathbb{R}^2$, e siano $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}^0(A)$. Allora, $\forall (x_0, y_0) \in A$ esiste una ed una sola solzione massimale di (1)*

Ed analoghe modfifiche si possono fare agli altri teoremi.

Quanto fatto si può generalizzare. Si può estendere alle equazioni differenziali di ordine n ed ai sistemi di n equazioni differenziali del primo ordine. Inoltre, equazioni di ordine n e sistemi di ordine superiore al primo (in forma normale) si possono ricondurre tutti a sistemi di equazioni del primo ordine

Tabella:
- 1) equazioni differenziali del primo ordine
- 2) equazioni differenziali di ordine n
- 3) sistemi di equazioni differenziali del primo ordine
- 4) sistemi di equzaioni differenziali di ordine qualsiasi

Si noti che 2) e 4) si possono ricondurre a 3).
Quindi si potrebbe studiare solo 3). Per questo caso, che è il più generale, sono a disposizione teoremi di esistenza ed unicità, di esistenza ed unicità della soluzione massimale, della esistenza "in grande" di una soluzione, del tutto analoghi a quelli che abbiamo visto nel caso semplice.