Avversione al rischio e Varianza

Abbiamo ricordato che, per $u: I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo , dove I rappresenta i possibili "guadagni monetari, avversione al rischio è per definizione:
$\delta_{E_p} \succeq p \qquad \forall$ lotteria p.
E si traduce nel fatto che u sia concava.

Si nota che nella teoria delle utilità di Von Neumann-Morgenstein tutto dipende dai valori attesi. Sembra che aspetti come la varianza siano irrilevanti .
Ma uno ha invece l'idea che tra 2 lotterie:

$p \quad 0ML \ \ prob\ \frac{1}{2} \qquad\qquad 1ML \ \ prob\ \frac{1}{2}$

$q \quad 0ML \ \ prob\ \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2}ML \ \ prob\ \frac{1}{2} \quad 1ML \ \ prob\ \frac{1}{4}$

Uno avverso al rischio dovrebbe preferire la 2° lotteria perché a parità di guadagno atteso la seconda presenta una minore varianza. E' giusta questa intuizione?
Si.

Osservazione 1 *Non solo è un'intuizione giusta. Il decisore, se preferisce avere* p *piuttosto che* $\frac{1}{2}ML$ *con certezza,*
deve avere le preferenze $p \succ q \succ \delta_{E_p}$ *! Infatti* q *coincide con* $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\delta_{E_p}$.

Esempio 1 *Supposto di avere* $u(x)$ *polinomio di 2° grado, siano* p, q *due lotterie con identico guadagno atteso:* $E_p = E_q = x_0$.
Sviluppiamo u *con Taylor di centro* x_0*:*

$$u(x) = u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0) + \frac{u''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

Possiamo scegliere una funzione d'utilità v *tale che:*
$v(x_0) = 0 \quad v'(x_0) = 1$ (*).
Abbiamo che:

$$u(x) = (x - x_0) + \frac{v''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

$$u(q) = \sum_j q_j v(x_j) = \sum_j q_j[(x_j - x_0) + \frac{v''(x_0)}{2}(xj - x_0)^2] =$$

$$= 0 \ + \frac{v''(x_0)}{2} \sum_j q_j (xj - x_0)^2$$

Ma questa è esattamente la varianza della lotteria!
E, tenendo conto del fatto che $v''(x_0) < 0$ *se abbiamo avversione al rischio, si ha che:*

$$u(p) \ > \ u(q) \quad \Leftrightarrow \quad Var\ p\ < Var\ q.$$

(*) NOTA: Ovviamente supponiamo che le preferenze siano crescenti (almeno "vicino ad x_0*). Dobbiamo anche notare che la nostra u (o v) essendo un polinomio di* 2° *grado, da un certo punto in poi diventerà decrescente! Ammettere preferenze così su tutto* $\mathbb{R}$ *è un pò eccessivo. Morale, anche con i polinomi di* 2° *grado i discorsi fatti valgono "localmente.*

Estendiamo ancora con Taylor questo risultato.

$$v:\ I \longrightarrow \mathbb{R},\ v \in \mathcal{C}^3(I) \quad x_0 \text{ interno a } I$$

$v(x_0) = 0 \quad v'(x_0) = 1$. *Supponiamo v concava (o, almeno, che* $v''(x_0) < 0$*).*
Allora $v''(x_0) = -\alpha$.

$$v(x) = (x - x_0) - \frac{\alpha}{2}(x - x_0)^2 + \frac{v'''(c)}{6}(x - x_0)^3$$

consideriamo 2 lotterie con $x_1, ...x_n$ *uguali (ipotesi non restrittiva).*

$$L_p = (p_1, x_1; ....; p_n, x_n)$$

$$L_q = (q_1, x_1; ....q_n, x_n).$$

Supponiamo $\sum_i p_i x_i = \sum_j q_j x_j = x_0$. *Cioè le due lotterie hanno lo stesso guadagno atteso* x_0.
Sia $\sigma > 0$. *E supponiamo che* $|v'''(x)| \le k \quad \forall x \in [x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]$.
Sia $\epsilon > 0$. *Allora* $\exists \delta > 0 \ \ (\delta \le \sigma)$ *tale che*
L_p, L_q *hanno spt in* $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$
$Var(L_q) > Var(L_p) + \epsilon$. *Segue allora che* $v(L_q) < v(L_p)$.

$$v(L_q) = \sum_j q_j v(x_j) = \sum_j [(x_j - x_0) - \frac{\alpha}{2}(x_j - x_0)^2 + \frac{v'''(c_j)}{6}(x_j - x_0)^3] =$$

$$= 0 - \frac{\alpha}{2} Var(L_q) + \sum_j q_j \frac{v'''(c_j)}{6}(x_j - x_0)^3.$$

$$v(L_p) = -\frac{\alpha}{2} Var(L_p) + \sum_i p_i \frac{v'''(c_i)}{6}(x_i - x_0)^3$$

.

$$\left|\sum_j q_j \frac{v'''(c_j)}{6}(x_j - x_0)^3\right| \leq \sum_j q_j \frac{|v'''(c_j)|}{6} |x_j - x_0|^3 \leq \frac{k}{6}\delta^3.$$

Allora, se $Var(L_q) > Var(L_p) + \epsilon$*, abbiamo che:*

$$-\frac{2}{\alpha}v(L_q) = Var(L_q) - \frac{2}{\alpha}\sum_j q_j \frac{v'''(c_j)}{6}(x_j - x_0)^3 \geq$$

$$\geq Var(L_q) - \frac{2}{\alpha}\frac{k}{6}\delta^3 > Var(L_p) + \epsilon - \frac{2}{\alpha}\frac{k}{6}\delta^3 \geq$$

$$\geq -\frac{2}{\alpha}v(L_p) + \epsilon - \frac{4}{\alpha}\frac{k}{6}\delta^3 \geq -\frac{2}{\alpha}v(L_q) \quad (\Leftrightarrow v(L-q) < v(L_p))$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\alpha}\frac{k}{6}\delta^3 < \epsilon \;\Leftrightarrow\; \delta^3 < \frac{6\epsilon}{k}\frac{\alpha}{4} \;\Leftrightarrow \delta^3 < \frac{3\alpha\epsilon}{2k} \;\Leftrightarrow\; \delta < \sqrt[3]{\frac{3\alpha\epsilon}{2k}} = \sqrt[3]{\frac{3(-v''(x_0))}{2k}}$$