1 Preliminari di teoria finanziaria

Consumatore

Atti di consumo: riguardano oggetti concreti.

Beni:fanno riferimento a un mercato in cui le cose vengono scambiate.

Preferenze:abbiamo a disposizione beni diversi, il consumatore su questi ha delle preferenze per quanto riguarda l'atto di consumo.

Panieri di beni: $(x_1, ..., x_l)$ è una l-upla che indica l beni diversi dove x_1 rappresenta il numero del "bene 1" disponibile (l'idea più generale è che avrò fissato un'unità di misura). $x_i \in \mathbb{R}$ e misura quanto ho del bene i-esimo nel particolare paniere che ho scelto. Si può supporre $x_i \geq 0$. I panieri di beni interessano solo per gli atti di consumo. Le preferenze del consumatore sono su diversi panieri di beni.

Esempio 1

1 *mele*

$$(1, 0) \quad (0, 1) \quad \textit{possono essere due diversi panieri.}$$

2 *pere*

Il consumatore è totalmente sovrano per quanto riguarda i suoi gusti. Uso il segno " $\succ$" se il consumatore preferisce il primo paniere al secondo. Le quantità fisiche di beni non determinano le preferenze del consumatore.
I panieri sono vettori e il " $>$" è comunemente usato tra numeri reali quindi si usa il simbolo " $\succ$". Posso usare il simbolo " $\succeq$" che indica la preferenza debole e " $\sim$" che indica l'indifferenza

$(1, 0) \succ (0, 1)$ *preferenza stretta*

$(1, 0) \succeq (0, 1)$ *preferenza debole*

$(1, 0) \sim (0, 1)$ *indifferenza*

2 Proprietà formali di $\succeq$ su $\mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{riflessiva}\\ \text{transitiva}\end{array}\right\}\ \text{preordine}\\ \text{totale}\end{array}\right\}\ \text{preordine totale}$$

<u>N.B.</u> Non è una relazione d'ordine perchè manca la proprietà antisimmetrica.

Assumo che il mio consumatore sia in grado di confrontare qualsiasi coppia di panieri di beni. Ciò che interessa del consumatore è la personalità.
$\succeq$ è una relazione d'ordine su $\mathbb{R}^l$.
$\mathbb{R}^l_{\succeq}$ indica che i vettori di $\mathbb{R}^l$ hanno tutti coordinate ≥ 0.

Dotazione del consumatore: $(w_1, ..., w_l)$

Mercato: Istituzione con regole più o meno ben codificate (alcune sotto aspetti di norme).

Assumo che ci siano dei *prezzi* $(p_1, ..., p_l) \in \mathbb{R}^l$; p_i rappresenta il prezzo del bene i-esimo espresso in unità monetaria (es: euro) espresso in quantità unitaria del bene (es: prosciutto $16,00$ euro al Kg). Il sistema di prezzi è dato immutabile per il consumatore.
È come se il consumatore avesse a disposizione

$\underline{W = p_1 w_1 + ... + p_l w_l}$ (euro)
$\uparrow$
dall'inglese wealth (ricchezza)

Il consumatore può acquistare beni rispettando il vincolo di bilancio $p_1 w_1 + ... + p_l w_l \leq W$, $x_i \geq 0$ che risulta per esempio una retta.

xxxxxxxxxxxx il consumatore ha libertà di scelta in questa regione

All'interno del vincolo di bilancio il consumatore andrà a scegliere il paniere di beni che preferisce.

Ovvero cercherà le $(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_l) \succeq (x_1, ..., x_l)$
$\forall (x_1, ..., x_l) \in B(w, p)$ dove $B(w, p)$ indica il vincolo di bilancio.

3 Funzioni di utilità

$u : \mathbb{R}^l_{\succeq} \to \mathbb{R}$ è funzione di utilità che rappresenta le preferenze del consumatore se vale $u(x_1, ..., x_l) \geq u(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_l) \Leftrightarrow (x_1, ..., x_l) \succeq (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_l)$ dove la prima è una disequazione ordinaria perchè u è a valori in $\mathbb{R}$. Il problema del consumatore diventa trovare $(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_l)$ in modo che valga $u(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_l) \geq u(x_1, ..., x_l)$. Questo è un problema di massimizzazione vincolata (si usano i metodi di KKT o Lagrange).

Sia $(x_1, ..., x_l)$ una lista di beni, x_1 mele x_2 pere ...

Ci sono vari tipi di mele: golden,stark... per ogni tipo si vuole conoscere il calibro,la qualità, da dove vengono,... ciò che interessa è quando si ha a disposizione qualcosa. Considero un solo bene a due istanti temporali diversi(x_0, x_1) di diversa dotazione (w_0, w_1).

x_0 le mele oggi in quantità w_0 Kg di mele oggi
x_1 le mele domani in quantità w_1 Kg di mele domani (noti con certezza)

Potremmo immaginare (ω_0, ω_1) due date diverse in cui il bene si rende disponibile per il consumo. Supponiamo per ora che non esista il mercato.

xxxxxxxxx grafic1 xxxxxxxxx

Non ci sono i vincoli di bilancio, ma esiste comunque una zona dove può scegliere i panieri di beni. "free disposal"(=libera disponibilità) indica la possibilità di disfarsi di qualcosa.Può darsi che la scelta ottimale sia $(1, 1)$ ovvero la possibilità di consumare una mela oggi e una domani. Le altre restano. Posso considerare le curve di livello e $(1, 1)$ rappresenta l'ottimo (PUNTO DI SAZIETA').

xxxxxxxxx grafic2 xxxxixxxxxx

In questa situazione,con questa regione,il punto ottimale è dato dal punto di tangenza e indica un consumo minore di quello che vorrebbe.

Le preferenze del consumatore non sono del tutto casuali

$$\left.\begin{array}{l}\text{Alla data 0 ho } w_0 \text{ mele}\\ \text{Alla data 1 ho } w_1 \text{ mele}\end{array}\right\} \quad \text{noto con certezza alla data 0}$$

xxxxxxxx grafic3 xxxxxxxxx

Questa è una rappresentazione delle scelte di consumo. I beni sono però deperibili e bisogna tenerne conto. Ho molte mele oggi e poche domani. Questo disegno va bene se il bene è deperibile

Nel caso di *bene deperibile* le scelte di consumo sono date da:

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 \leq w_0 \text{ dotazione inziale}\\ x_1 \leq w_1 \leftarrow \text{rappresenta l'insieme sul quale fare le scelte}\end{array}\right.$$

Nel caso di *bene non deperibile*

xxxxx grafic4 xxxxxxxxx

xxxxx grafic4 xxxxxxxxxxxxxx
xxxxx grafic4 xxxxxxxxxxxxxx
xxxxx grafic4 xxxxxxxxxxxxxx
xxxxx grafic4 xxxxxxxxxxxxxx
xxxxx grafic4 xxxxxxxxxxxxxx
xxxxx grafic4 xxxxxxxxxxxxxx

$$\begin{cases} x_0 \leq w_0 \text{ dotazione inziale} \\ x_1 \leq w_1 + (w_0 - x_0) \end{cases}$$

$\uparrow$

w_1+ quello che non ho consumato al tempo ω_0

Si può differire il consumo!
Se si può differire il consumo c'è spazio anche per altri scambi. Potrebbe avvenire uno scambio tra l'individuo al tempo 0 e l'individuo al tempo 1 considerando lo stesso consumatore come due diversi.

Ci sono due beni non deperibili e un sistema di prezzi p_0 e p_1. Potremmo anche assumere che l'unità monetaria sia il prezzo $p_0 = 1$ del bene al tempo 0, oppure normalizzare tutto. Questo è plausibile perchè il bene non è deperibile. Pongo $p_1 = \nu$.
Dire $p_0 = 1$ significa che avere una mela o un'unità monetaria è la stessa cosa. Dire $p_1 = \nu$ significa che posso convertire una mela al tempo t_1 in unità monetaria.
p_0 è il prezzo alla data 0 per avere il bene.
p_1 è il prezzo alla data 0 per avere una quantità di bene alla data 1.
Si può dire che w_0 è equivalente ad avere w_1/ν (posso subito convertire tutto in mele).1 bene, 2 date: 0 e 1
$(\bar{x_0}, \bar{x_1})$ t.c. $(\bar{x_0}, \bar{x_1}) \succeq (x_0, x_1)$ $\forall$ $(x_0, x_1) \in$ "B"(w) Poniamo 1 il prezzo del bene alla data 0 e ν il prezzo del bene alla data 1.
<u>N.B.</u> per prezzo si intende il prezzo pagato alla data 0 oppure 1 e per bene alla data 1 si intende il bene disponibile.

$$\begin{cases} p_0 = 0 \\ p_1 = \nu \end{cases}$$

Questi scambi vengono effettuati tutti alla data 0 perchè ho come ipotesi la conoscenza esatta dei costi e della disponibilità alla data 0

$W = p_1 w_1 + ... + p_l w_l$ vincolo di bilancio

$p_1x_1 + ... + p_lx_l \leq p_1w_1 + ... + p_lw_l = W$ vincolo di bilancio
In questo caso si ottiene $p_1x_1 + ... + p_lx_l \leq p_1w_1 + ... + p_lw_l$.
L'effetto complessivo dell'esistenza di un mercato è di miglioramento, di ampliamento delle possibilità.

xxxxxxx grafic5 xxxxxxxxx $\left\{\begin{array}{l}\text{In questa zona la situazione}\\ \text{migliora se } \nu < 1\\ \text{altrimenti peggiora!}\end{array}\right.$

xxxxxxxxx grafic5 xxxxxxxxxx
xxxxxxxxx grafic5 xxxxxxxxxx

xxxxxxxxx grafic5 xxxxxxxxxx $\left\{\begin{array}{l}\text{In questa zona la situazione}\\ \text{migliora sicuramente}\end{array}\right.$

xxxxxxx grafic5 xxxxxxxxx

(w_0, w_1) appartiene al vincolo di bilancio. La posizione del consumatore migliora.

xxxxxxx grafic6 xxxxxxxxx $\left\{\begin{array}{l}\text{Se questa pendenza è maggiore di } \odot\\ \text{allora ho effettivamente}\\ \text{un ampliamento delle possibilità}\\ \text{maggiore in valore assoluto}\end{array}\right.$

xxxxxxxxx grafic6 xxxxxxxxxx
xxxxxxxxx grafic6 xxxxxxxxxx
xxxxxxxxx grafic6 xxxxxxxxxx
xxxxxxxxx grafic6 xxxxxxxxxx

$$\begin{array}{lclcl} x_0 + x_1\nu \leq w & \Rightarrow & \nu x_1 \leq w - x_0 & \Rightarrow & x_1 \leq w/\nu - x_0/\nu \\ |-1/\nu| = 1/\nu & \Rightarrow & 1/\nu > 1 & \Rightarrow & \nu < 1 \end{array}$$

Se $\nu \leq 1$ ho una situazione migliore.

Se $\nu > 1$

xxxxxxx grafic7 xxxxxxx $\left\{ \begin{array}{l} \text{In questo caso} \\ \text{non ho un miglioramento} \\ \text{totale: alla data 0} \\ \text{sto meglio, a quella 1} \\ \text{sto peggio} \end{array} \right.$

xxxxxxx grafic7 xxxxxxxx
xxxxxxx grafic7 xxxxxxxx
xxxxxxx grafic7 xxxxxxxx
xxxxxxx grafic7 xxxxxxxx

N.B.Il vincolo di bilancio non fa discriminazione tra passato e futuro.

E' molto insensato pensare che possa accadere $\nu > 1$
Il consumatore non è obbligato a vendere. La presenza di un mercato non obbliga a usarlo. Può consumare la mela del tempo 1 già al tempo 0. Se $\nu > 1$ non avrebbe questa possibilità. Può accadere $\nu > 1$ ma non è una situazione normale.
N.B.ho continuato a considerare p_0 e p_1 i prezzi pagati al tempo 0; se li considerassi al tempo 1 si invertirebbe la situazione.
E' chiaro che alla data 0 avverranno degli scambi di bene contro denaro.
Ciò che si assume abitualmente per quanto concerne i mercati è che
gli scambi avvengono liberamente. Lo scambio avviene quando chi fa lo scambio preferisce la situazione ex post a quella ex ante. Lo scambio avviene se si ha un vantaggio da entrambe le parti. Non ci si può però limitare al baratto, quindi si introduce la moneta come intermediario degli scambi. Per moneta si può intendere l'euro come il sale, il grano (che sono anche beni effettivi), o l'oro. "*La moneta è fatta per essere usata nello scambio, non per l'accrescersi con l'interesse; essa è per sua natura sterile, mediante l'usura prolifica e questo è di gran lunga il modo più innaturale di guadagnare*"(Aristotele).
Questa affermazione supporta e incita una certa prevenzione da parte delle religioni cattolica, ebraica e musulmana verso i prestiti con qualunque tasso d'interesse. L'affermazione ci fa capire inoltre come già in epoca aristotelica ci fosse un mercato piuttosto avanzato.

I prestiti avvengono se:

Necessito danaro (C) al tempo $t_0 \rightarrow$ *restituisco* N *al tempo* t_1

(C) me lo dà chi necessità C *al tempo* t_1

Ci sono molte complicazioni per la presenza del tempo. Gli scambi avvengono tra due soggetti che però non vivono nel vuoto. io posso cercare chi mi dia C chiedendo in giro un M minore, ovvero cerco una situazione di equilibrio sul mercato. Da una parte c'è qualcuno che necessita la somma C, dall'altra ci devono essere persone in grado di prestare C e poi mi aspetto che le preferenze tra C e M siano tali che $M > C$. *Preferenze medie* $M > C$

Posso avere bisogno di denaro perchè ho una necessità di consumo.C mi serve per consumo(di un servizio, di un bene).C mi potrebbe invece servire per aprire un'attività (a esempio).

C *[capitale monetario]*$\rightarrow \bar{C}$ *[capitale reale]*$\rightarrow$ *flusso monetario continuo.*

C mi serve per un'INVESTIMENTO.

Si è disponibili a restituire $M > C$ perchè C mi offre una serie di possibilità che prima non avevo. Il consumatore mediamente preferisce un consumo alla data attuale piuttosto che alla data futura.

Se presto C non posso usarlo finchè non mi sarà ridato.
Questo giustifica $M > C$. Non è compito dell'economia obbiettare i gusti del consumatore, però è lecito studiarne i motivi.

L'altro aspetto che giustifica $M > C$ *è l'incertezza.* In base all'affidabilità di chi chiede C e a seconda di come lo investe varia la richiesta di M. Altro fattore da considerare è l'inflazione. Chiedere $M > C$ serve anche per conservare il potere d'acquisto di C. In questo caso non consideriamo l'inflazione.

Esempio 2

Il grano è bene di consumo, capitale monetario, capitale reale (se lo semino mi dà altro grano). Il mercato monetario si sviluppa solo se c'è un adeguato sovrappiù. Le radici della condanna morale agli interessi nascono dal fatto che storicamente si chiedevano prestiti per necessità primarie.

Il punto di partenza della matematica finanziaria è che avvenga uno scambio tra (C, t_0) e (M, t_1) supposto C,$M > 0$,$M > C$,$t_1 > t_0$.

$M = C + I$

$I = M - C$ *interesse*

C *capitale*

M *montante*

$i = I/C$ *tasso d'interesse* o *tasso di rendimento* (interesse e rendimento fanno riferimento a semantiche differenti)

$r = M/C$ *fattore di capitalizzazione*

$I = iC$ per definizione di i ma non c'è dietro a questo nessuna legge di carattere finanziario. Sto facendo riferimento a un solo scambio.

Focalizzando invece l'interesse al tempo t_1:
(K, t_1) associo (P, t_0)

K *capitale*

P *valore attuale* o *scontato di* K *al tempo* t_0

$D = K - P$ *sconto*

$d = D/K$ *tasso di sconto*

$\nu = P/K$ *fattore di anticipazione* (o di attualizzazione o di sconto)

	i	r	d	ν
i	i	$r-1$	$d(1-d)$	$(1-\nu)/\nu$
r	$1+i$			$1/\nu$
d				
ν				

i e r sono le più significative
i e d le più usate

$$\begin{array}{lll} i & \vec{X}/\vec{t} = (C,-M)/(t_0,t_1) & \vec{X} \text{ sono soldi} \\ ii & \vec{X'}/\vec{t'} = (-C,M)/(t_0,t_1) & \vec{t} \text{ date assegnate} \end{array}$$

i è un'esempio di indebitamento o provvista. I soldi che ho al tempo t_0 aumentano di C, al tempo t_1 diminuiscono di $-M$.

ii è un'esempio di investimento.

Le coppie (C, t_0) e (M, t_1) vengono considerate equivalenti.

$$\begin{array}{ll} \text{I} & (C,t_0) \succ_I (M,t_1) \\ \text{II} & (C,t_0) \prec_{II} (M,t_1) \end{array}$$

Nè I nè II considerano equivalenti le situazioni, ma siamo in un mercato e queste preferenze strette degenerano quasi a equivalenza a livello complessivo.

A partire da $(C, t_0) \sim (M, t_1)$ si ricava una *legge di equivalenza finanziaria*
Abbiamo $\mathbb{R}^2$ e una relazione su $\mathbb{R}^2$. Che $(C, t_0) \sim (M, t_1)$ implichi $(\alpha C, t_0) \sim (\alpha M, t_1)$,cosa che in pratica è dichiaratamente falsa, possiamo pensare sia un'approssimazione ragionevole, cioè sia localmente vera.
Si presuppone che la legge di equivalenza sia ragionevolmente considerata una relazione di equivalenza.
Si può definire una relazione di equivalenza facendo riferimento a una certa funzione. É lecito chiedersi se sotto una legge finanziaria ci sia una qualche funzione.

Definiamo $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Sia $(C, t_0) \sim (M, t_1) \iff \psi(C, t_0) \sim \psi(M, t_1)$

Linearità di $f : U \times V \to W$ nella prima variabile $f(\alpha u + \beta \overline{u}, v) = \alpha f(u, v) + \beta f(\overline{u}, v)$ dove U e W sono spazi vettoriali e V è un'insieme qualsiasi.

$\psi(C, s)$ è il valore di C al tempo s. Possiamo immaginare di essere al tempo 0 e a questo vogliamo ricondurre tutte le somme monetarie che abbiamo al tempo s.

$\psi(\alpha C + \beta D, s) = \alpha\psi(C, s) + \beta\psi(D, s)$

$\psi(\alpha C, s) = \alpha\psi(C, s)$

$C = 1 \ \ \alpha = \underline{C}$

$\psi(\underline{C}, s) = \underline{C}\psi(1, s)$

Ciò che voglio è conoscere $\psi(1, s)$ $\forall s \in \mathbb{R}$ perchè se ψ è lineare sulla prima variabile, una volta conosciuto questo ho tutta ψ.

Definisco $\varphi = \psi(1, s)$ perchè mi basta considerare una funzione del tempo.
Possiamo considerare $\psi(C, 0) = C$ (la scelta più naturale), $\psi(1, 0)$ se la ψ è lineare nella prima coodinata, quindi $\varphi(0) = 1$ è una scelta di normalizzazione.

Esempio 3 *Supponiamo di avere a disposizione un capitale di 100 euro e consideriamo un'interesse semplice del* 3% *su questo*

xxix grafic8 xxx $\begin{array}{l} \psi(100, 0) = 100 \\ \psi(100, 1) = 103 \\ \psi(100, 2) = 106 \end{array}$ *perciò* $\psi(100, s) = 3s + 100$

$\psi(1, s) = 0,03s + 1 \quad \leftarrow$ *r fattore di capitalizzazione*

ψ *trasforma* C *all'istante* s *in* C *all'istante* 0.
Considero il problema opposto: de ho C *all'stante* 0*, quanto sarà* C *all'istante* s*? Supponiamo di avere* 100 *al tempo* 0*: quanto avrò al tempo* s*?*

$\psi(100, 1) = 100 = \psi(106, 2)$

$\psi(1, 1) = \varphi(1) = \frac{100}{103}$

$\psi(1, 2) = \varphi(2) = \frac{100}{106}$

$\psi(100, 1) = \frac{100}{103}\psi(103, 1) = \frac{100}{103} \cdot 100$

$\varphi(s) = \frac{1}{1+0,03s}$ *fattore di attualizzazione*

C al tempo 0 avremo $C(1+0,03s)$ al tempo s.
C al tempo s equivale a $C\frac{1}{1+0,03s}$ al tempo 0.
$0,03i$ tasso d'interesse unitario.
i è unitario rispetto al capitale e rispetto al tempo.
s è la misura del tempo con unità di misura uguale a quella di i.

Esempio 4 *i =interesse semplice dello 0,05 semestrale. s =anni.*
La formula diventa $1 \cdot (1+i\cdot 2s)$. $2s$ perchè un'anno sono 2 semestri.

xxxxxxxxxxxxx grafic8 xxxxxxxxxxxxxx

dal grafico di φ
Interesse composto
$C\cdot(1,s)^s$ al tempo s
se parto con C al tempo 0.
$\frac{C}{(1+i)^s}$ C al tempo s
$\frac{1}{(1+i)^s}$ fattore di attualizzazione

<u>N.B.</u>: La restrizione $s \geq 0$ non è necessaria anche perchè l'istante 0 lo fissiamo noi arbitrariamente.

$(C,s)\sim(D,t)$ (I)

$\psi(C,s)$ (II)

$(C,s)\sim(D,t) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \psi(C,s)=\psi(D,t)$

$\psi(C,s) = C\psi(1,s) = C\varphi(s)$

$\varphi(s) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \psi(1,s)$ (III)

$\uparrow$
quanto valuto a $t=0$ avere una lira al tempo s

$\psi(1,s)=\psi(C,0)$

Esiste un'altro tipo di approccio che si può fare C,D,s,t
Qual'è D tale che $(D,t)\sim(C,s)$ dato C all'istante s e dato t? $D=\mu(C,s,t)$
Ipotesi di omogeneità $D=\mu(C,s,t) \Rightarrow \alpha D = \mu(\alpha C, s, t)$

$\rho(s,t)=\mu(1,s,t)$ (IV) <u>legge finanziaria</u>

Ho una unità monetaria al tempo s quindi al tempo t ho:
$\rho(s,t)=\rho(s+T,t+T)$

Teorema 1 *Sia $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Supponiamo che $\forall T \in \mathbb{R}$ sia $\rho(s+T, t+T) = \rho(s,t)$. Allora esiste $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\rho(s,t) = r(t-s) \quad \forall s,t \in \mathbb{R}^2$*

Esercizio 1 *Dimostrare il teorema aggiungendo le ipotesi mancanti.*

Esempio 5
$r(z) = 1 + iz$ interesse semplice, $r(z) = (1+i)^z$ interesse composto

Cosa vuol dire che una legge finanziaria è scindibile?
Se vale $\rho(s,t) = \rho(s,u)\rho(u,t)$ (fa riferimento all'interesse composto) dove $s \leq u \leq t$ si dice che la legge finanziaria è scindibile.

$r(t-s) = r(u-s)r(t-s)$
$0 \leq \sigma \leq \tau \quad \sigma = u-s \quad \tau = t-s \quad \tau - \sigma = t-u$
$r(\tau) = r(\sigma)r(\tau - \sigma)$
$r(\tau - \sigma)$ mi dice qual'è il montante per una lira investita per un tempo $\tau - \sigma$

$(1+i)^\tau = (1+i)^\sigma(1+i)^{\tau-\sigma}$ l'interesse composto è scindibile.
$(1+i\tau) = (1+i\sigma)(1+i(\tau-\sigma)) = 1 + i\tau + i^2\sigma(\tau-\sigma)$ l'interesse semplice non è semplice.

Suppongo σ, τ due numeri reali arbitrari, non più vincolati dalla condizione $0 \leq \sigma \leq \tau$, allora chiamo $x = \sigma, y = \tau - \sigma$

$$r(x+y) = r(x)r(y) \tag{1}$$

legge finanziaria omogenea rispetto al capitale, indipendente da traslazioni nel tempo, scindibile (in senso generalizzato).
Con tutte queste ipotesi ottengo $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che
$r(x+y) = r(x)r(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$ $\quad$ <u>Eq.Funzionale</u> $\quad r(x) = a^x$, $a > 0$
Quindi le sole leggi finanziarie che soddisfano 1 sono del tipo $r(x) = a^x$, $a > 0$ (sono le uniche funzioni continue misurabili secondo Lebesgue che soddisfano questa condizione).
<u>N.B.</u>: $r : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ è isomorfismo di gruppi abeliani.

$\mathbb{R}$ è spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ di dimensione infinita, quindi ha una base infinita (base di Hamel). Si fa questa considerazione perchè con la condizione $r(x+y) = r(x)r(y)$ non riusciamo a sapere cosa accade nel punto $\sqrt[2]{2}$ pechè sfrutto solo la addittività. Assumendo a priori la continuità di r, se so cosa accade in 1 so cosa accade in $\sqrt[2]{2}$. Se così non fosse c'è d'aiuto la considerazione di $\mathbb{R}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$. Mi creo la base infinita di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{Q}$ dando valori arbitrari nei limiti di $r(x+y) = r(x)r(y)$. Se la funzione è continua allora $r(\sqrt[2]{2})$ riesco a conoscerlo calcolandone il limite. La continuità mi garantisce l'esistenza di una serie che convergerà a $r(\sqrt[2]{2})$.

Esempio 6

$$\begin{array}{rl}
(1,0) \sim (C,2) = (1+2i,2) & t = 2 \\
C = 1+2i & \textit{legge dell'interesse semplice} \\
 & \textit{a partire dal tempo } t = 0 \\
r(2) = 1+2i & \\
(1,0) \sim (C\prime,1) & \textit{dove } C\prime = 1+i \\
(C\prime,1) \sim (C\prime r(1),2) = ((1+i)^2,2) & \textit{legge dell'interesse semplice} \\
 & \textit{dal tempo } t = 0 \textit{ al tempo } t = 1 \\
 & \textit{di una lira che levo e poi rimetto} \\
 & \textit{in banca fino al tempo } t = 2 \\
(1,1) \sim ((r(2-1),2) & \\
\textit{ma } (1+2i,2) \neq ((1+i)^2,2) & \textit{salvo casi banali.}
\end{array}$$

L'aver fatto un'operazione in mezzo o meno mi dà risultati diversi perchè la legge non è scindibile. Avere una legge scindibile implica che non varia il risultato finale facendo operazioni in mezzo.

Arbitraggio $\rightarrow$ Guadagnare qualcosa con certezza dal niente.

Esempio 7

Un tizio investe una lira a $t = 0$ con interesse semplice per due anni: avrà $1 + 2i$. Mi faccio prestare da lui una lira al tempo $t = 0$, la ritiro al tempo $t = 1$, reivesto immediatamente il montante e alla fine ottengo $1+2i+i^2$. Gli dò $1+2i$ ho guadagnato i^2. Stiamo trascurando le spese inerenti le operazioni finanziarie. Se abbiamo possibilità di arbitraggio su un mercato finanziario vuol dire che non è concorrenziale.

Dimostrazione 1

<u>N.B.</u>: r, s, t sono variabili quantificate e quindi le posso considerare come costanti. L'unica variabile è ρ (anche se la si potrebbe considerare quantificata, ma non lo facciamo). Se avessimo scritto " $\exists\rho$ " allora ρ sarebbe stata quantificata quindi il teorema non avrebbe avuto variabili, ma solo costanti).

Definisco $r(x) = \rho(0, x)$ *e prendo* $T = -s$
$\rho(s, t) = \rho(s - s, t - s) = \rho(0, t - s) = r(t - s)$

So che $M = C(1 + i)^n$, ma talvolta può essere
$M = C(1 + i)^t \quad t = 2,4$ a esempio

a) $C(1 + i)^2(1 + 0.4i)$ parte con interesse composto, parte con interesse semplice.

b) $C(1 + i)^{2,4}$

$C(1 + i)^2(1 + 0.4i) \qquad f(x) = 1 + ix \quad 0 \leq x \leq 1 \quad i > 0$
$C(1 + i)^2(1 + 0.4i)^{0,4} \quad g(x) = (1 + i)^x$

xxxxxxx grafic9 xxxxxxx

quindi $C(1 + i)^2(1 + 0.4i) > C(1 + i)^{2,4}$
a) fa il nostro interesse ed è
effettivamente quello che fanno
le banche.

$$
\begin{array}{lll}
 & & \text{NERO in attivo } i_a \text{ capitalizzato annualmente} \\
 & \nearrow & \quad \uparrow \\
\textit{ANATOCISMO} & & \text{Capitalizzazione composta} \\
 & \searrow & \quad \downarrow \\
 & & \text{ROSSO in passivo } i_p \text{ capitalizzato trimestralmente}
\end{array}
$$

Potrebbe essere i_a 3% annuo, i_p 10% annuo capitalizzato trimestralmente.
$j(4) = 10\%$ indica un tasso d'interesse annuo, il 4 indica che viene calcolato 4 volte l'anno, quindi viene capitalizzato trimestralmente, (quattro trimestri in un anno).

$C(1 + i)^{0,25}$

$C(1,1)^{0,25}(1,1)^{0,25}(1,1)^{0,25}(1,1)^{0,25} = C(1,1)$ non è quello che si intende.
Per $j(4) = 10\%$ s'intende $C(1 + \frac{0,1}{4})^4$ quel che si riceve ogni trimestre elevato per quattro trimestri.

$C(1 + \frac{0,1}{4})^4 > C(1,1)$

Quindi un tasso i annuo capitalizzato trimestralmente risulta maggiore del tasso i annuo.

itasso d'interesse annuo

Tasso d'interesse *equivalente* a i, relativo a un periodo diverso.
Interesse *nominale* pari a i, che però viene capitalizzato in periodi più brevi.
interessi trimestrali $i_{1/4}$
$(1 + i_{1/4})^4 = 1 + i$
m numero di periodi di capitalizzazione durante l'anno
$j(2) = 10\%$ 5% dopo 6 mesi 5% dopo 6+6 mesi
$j(2)$ equivalente a un tasso annuo che è maggiore di di $j(2)$
$i = (1 + i_{1/m})^m - 1 = (1 + j(m)/m)^m - 1$ tasso annuo equivalente a $j(m)$

capitalizzazione continua

$$\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{j(m)}{m}\right)^m - 1 = e^{j(\infty)} - 1$$

$j(\infty) = 10\%$ $j(\infty)$ sta a indicare una capitalizzazione continua.
equivale a un tasso annuo i $e^{\infty} - 1$
Interesse annuo equivale a $j(\infty)$

4 Rendite certe

Esistono rendite a rata costante. Vuol dire che viene pagata una rata R ogni "anno" di durata n anni.
Come facciamo a valutarlo al tempo t?
Legge finaziaria (capitalizzazione composta) rapportare tutto al tempo t.

Osservazione 1 *La legge finanziaria è omogenea rispetto al capitale perciò non è riduttivo considerare rate unitarie* $R = 1$.

$a_{n|i} = a$ figurato n al tempo t.
Ovvero valuto una rata unitaria in n tempi al tasso i.
$a_{n|i}$ valore di una rendita attuale unitaria posticipata, composta da n rate al tasso d'interesse i

$\nu = \frac{1}{1+i}$ $\nu + \nu^2 + \cdots + \nu^n = a_{n|i}$

$\nu(1 + \nu + \cdots + \nu^{n-1}) = \frac{\nu(1-\nu^n)}{1-\nu}$

$\ddot{a}_{n|i} = (1 + \nu + \cdots + \nu^{n-1}) = \frac{1-\nu^n}{1-\nu}$

$$z \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} n \text{ } (n \text{ rate}) \\ \infty \text{ (perpetuo)} \end{array}$$

$$* \begin{array}{c} \nearrow \\ \rightarrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} \text{blank (rata posticipata)} \\ - \text{ (in continuo)} \\ \cdot\cdot \text{ (in anticipo)} \end{array}$$

$t/$ la rata è differita in t periodi

(m) frazionata in m rate (di valore) pari a $\frac{1}{m}$

$$X \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} a \text{ valore attuale} \\ s \text{ montante} \end{array}$$

$s_{n|i}$ montante

Disinguere tra valore attuale e montante significa che abbiamo implicitamente l'idea di valutare in tempi diversi:

$s_{n|i} = r^{n-1} + \cdots + r + 1 = \frac{1-r^n}{1-r} \qquad r = \frac{1}{\nu}$

Esempio 8

1) Caso della rendita perpetua

$$\ddot{a}_{\infty|i} = \lim_{n\to\infty} \left[1 + \cdots + \nu^{n-1}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\nu^n}{1-\nu} = \frac{1}{1-\nu} \quad se \quad i > 0$$

2) $t = 3$ Caso della differita di 3 anni e posticipata

$$a_{n|i} = \begin{cases} \nu^4 + \nu^5 + \cdots + \nu^{n+3} \\ \frac{\nu(1-\nu^n)}{1-\nu} \cdot (\nu^3) \quad \leftarrow \quad \textit{ulteriore attualizzazione} \end{cases}$$

grazie alla scindibilità della legge finanziaria

4.1 Rendite frazionate

$a^{(m)}_{n|i}$ rata frazionata in m periodi.

$a^{(m)}_{n|i} = \frac{1}{m}\frac{\left(1-\nu_{\frac{1}{m}}{}^{nm}\right)\nu_{\frac{1}{m}}}{\left(1-\nu_{\frac{1}{m}}\right)} = \frac{1}{m}\frac{\left(1-\nu_{\frac{1}{m}}{}^{nm}\right)}{i_{\frac{1}{m}}} = \frac{\left(1-\nu_{\frac{1}{m}}{}^{nm}\right)}{j(m)}$

Quindi: $\quad a^{(m)}_{n|i} = \frac{1}{j(m)}\left(1-\nu_{\frac{1}{m}}{}^{nm}\right)$

$\nu_{\frac{1}{m}}{}^{nm} = \left(\frac{1}{1+i_{\frac{1}{m}}}\right)^{nm} = \frac{1}{\left[\left(1+i_{\frac{1}{m}}\right)^m\right]^n} = \frac{1}{(1+i)^n}$

Quindi: $\quad a^{(m)}_{n|i} = \frac{1}{j(m)}\left(1-\frac{1}{(1+i)^n}\right) = \frac{i}{j(m)}\left(\frac{1-(1-i)^{-n}}{i}\right) = \frac{i}{j(m)}a_{n|i}$

4.2 Rendite in continuo

Ricevo una rata infinitesima in ogni momento e posso ricapitalizzarla.

$a_{n|i} = \lim_{m\to\infty} \frac{i}{j(m)}a_{n|i} = \frac{i}{\partial}a_{n|i} = \frac{i}{\log(1+i)}a_{n|i}$

$j(m)$ equivale a un tasso annuo $(1+\frac{j(m)}{m})^m - 1$

$i = e^{j(\infty)} - 1 \qquad 1 + i = e^{j(\infty)} \qquad j(\infty) = \log(1+i) = \partial$

4.3 Valutazioni a un tempo τ

Suppongo di avere delle obbligazioni che pagano una cedola ogni anno. Il valore di mercato di un'obbligazione corrisponde a una valutazione al tempo τ di una rendita.
$1\cdot\nu^{t-\tau}+1\cdot\nu^{t+1-\tau}+\cdots+1\cdot\nu^{t+n-\tau} = \nu[\nu^t+\cdots+\nu^{t+n}] = \nu^{t+\tau}[1+\cdots+\nu n+1] = \nu^{t-\tau}\ddot{a}_{n+1|i}$ infine mi riporto al periodo di partenza.

Quindi: $\quad 1 \cdot \nu^{t-\tau} + 1 \cdot \nu^{t+1-\tau} + \cdots + 1 \cdot \nu^{t+n-1-\tau} = \nu^{t-\tau} \ddot{a}_{n|i}$

Osservazione 2 $\quad a_{n|i} = \frac{1-\nu^n}{i}$ *quindi* $\quad 1 = i a_{n|i} + \nu^n$
Ho una rendita costante con rata uguale a i.

Se ho una rendita costante R il suo valore attuale è $A = R\nu \frac{1-\nu^n}{1-\nu}$
quindi $n = \frac{\log(\frac{A(1-\nu)}{R\nu} - 1)}{\log \nu}$
$n = \frac{\log \frac{R-iA}{R}}{\log 1+i}$

Esempio 9 *Dati A, R, n trovare ν*
$A = R(\nu + \cdots + \nu^n)$
$p(\nu) = R\nu^n + \cdots + R\nu - A$ $\quad$ *voglio trovare lo zero di $p(\nu)$*

xxxxxxx grafic xxxxxx $\quad R, A > 0$ $\quad$ *valore attuale*
$p \in C^\infty(\mathbb{R})$
$p(0) = -A < 0$
$\lim_{\nu \to \infty} p(\nu) = +\infty \qquad \exists b > 0$ *t.c.* $P(b) > 0$
Il teorema degli zeri garantisce che esiste uno zero.

Vediamo cosa succede nel punto 1: $p(1) = nR - A \quad > 0$ può essere pericolosa questa supposizione. Sono sicura che esiste una radice positiva di questo polinomio che quasi sicuramente sarà < 1
$p\prime(\nu) = Rn\nu^{n-1} + \cdots + R > 0$
$p\prime\prime(\nu) = Rn(n-1)\nu^{n-2} + \cdots + 2R > 0$
La funzione è strettamente convessa per $\nu > 0$
Questa è l'idea che porta al concetto di tasso interno di rendimento.

N.B. $R - Ai > 0$ perchè per calcolare il tempo si ha a che fare con i logaritmi. $A < R/i$ non potrò mai avere un valore attuale $A \geq R/i$ perchè A dipende dal numero di rate.

4.4 Ammortamenti di prestiti

anno	quota capitale	quota interesse	annualità (rata)	debito residuo
0				C
1	C_1	$C \cdot i$	$Q_1 = C_1 + C \cdot i$	$C^{(1)} = C - C_1$
2	C_2	$C^{(1)} \cdot i$	$Q_2 = C_2 + C \cdot i$	$C^{(2)} = C - C_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	C_n	$C^{(n-1)} \cdot i$	$Q_n = C_n + C \cdot i$	$C^{(n)} = C - C_n$

i è il tasso d'interesse composto applicato nell'intera durata.
Condizioni ragionevoli sono $0 \leq C_1 \leq C$.
C_n è la quota di capitale che restituisco al mio creditore.
la condizione ragionevole è $c^{(n)} = 0$ altrimenti non ho estinto (ammortato) il debito.

Possibile piano di ammortamento di particolare interesse.

anno	quota capitale	quota interesse	annualità (rata)	debito residuo
0				C
1	0	$C \cdot i$	$Q_1 = C \cdot i$	$C^{(1)} = C$
2	0	$C \cdot i$	$Q_2 = C \cdot i$	$C^{(2)} = C$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	C	$C \cdot i$	$Q_n = C + C \cdot i$	$C^{(n)} = 0$

N.B.Nulla vieterebbe di rimborsare una quota negativa, ma solitamente non viene considerato.

0				C
1	$-C_1$	$C \cdot i$	$Q_1 = 0$	$C^{(1)} = C + C \cdot i$
2	$C + C_1$	$C^{(1)} \cdot i$	$Q_2 = -$	$C^{(2)} = 0$

4.5 Ammortamento con annualità (rate) costanti (ammortamento francese)

anno	quota capitale	quota interesse	annualità	debito residuo
0				C
1	$C_1 = R - C \cdot i$	$C \cdot i$	R	$C^{(1)} = C - C_1$
2	$C_2 = R - C^{(1)} \cdot i$	$C^{(1)} \cdot i$	R	$C^{(2)} = C - C_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n			R	0

dove $\quad C = Ra_{n|i} \qquad R = \frac{C}{a_{n|i}}$

4.6 Ammortamento 'italiano' (quote capitali restanti)

anno	capitale	interesse	annualità (rata)	debito residuo
0				C
1	C/n	$C \cdot i$	$Q_1 = C/n + C \cdot i$	$C^{(1)} = C - C/n$
2	C/n	$C^{(1)} \cdot i$	$Q_2 = C/n + C^{(1)} \cdot i$	$C^{(2)} = C^{(1)} - C/n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	C/n	$C/n \cdot i$	$Q_n = \frac{C}{n}(1-i)$	0

Suppongo di pagare sempre la stessa quota C/n
N.B. Un prestito è visto da un creditore come un'investimento per ottenere una certa rendita a un tasso i. Se colui che ha fatto il prestito chiede una restituzione anticipata si va a una trattativa fra le parti per stabilire sotto quali condizioni debba avvenire la restituzione. Può darsi che chi deve abbia uno sconto. Capita anche che sia il debitore a chiedere un'estinzione anticipata ma non vi alcuna ragione per cui il creditore debba approvare la proposta, nella misura in cui il debitore può tenere i soldi in tasca, dato che ce li ha già fino alla data concordata.

4.7 Interessi pagati anticipatamente (ammortamento tedesco)

i interesse composto applicato.

$i, r, d, \nu \quad Ci\nu = Cd$

0	0	0	0	0
1	C	Ci	$C + Ci$	0

$\updownarrow$ Ammort.tedesco $\updownarrow$

entrate $\rightarrow$	0		Cd	Cd	C	debitore
uscite $\rightarrow$	1	C	0	C	0	

Esempio 10 *Capitale rimborsato alla scadenza*

a) *Ammortamento normale. Prestito C con interessi posticipati*

anno	*capitale*	*interesse*	*annualità (rata)*	*debito residuo*
0	0	0	0	C
1	0	$C \cdot i$	$C \cdot i$	C
2	0	$C \cdot i$	$C \cdot i$	C
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	C	$C \cdot i$	$C + C \cdot i$	0

b) *Ammortamento tedesco. Prestito C con interessi anticipati*

anno	*capitale*	*interesse*	*annualità (rata)*	*debito residuo*
0	0	Cd	Cd	C
1	0	Cd	Cd	C
2	0	Cd	Cd	C
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	C	0	C	0

c) *Prestito C con interessi anticipati*

anno	*capitale*	*interesse*	*annualità (rata)*	*debito residuo*
0	0	0	0	$C - Cd$
1	0	$(C - Cd)i$	$(C - Cd)i$	$C - Cd$
2	0	$(C - Cd)i$	$(C - Cd)i$	$C - Cd$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$C - Cd$	$(C - Cd)i$	$(C - Cd)(1 + i)$	0

il punto c) è ricavato da un'osservazione finanziaria: alla data 0 *viene dato* $C - Cd$

I punti a) b) c) devono avere vettori flussi di cassa equivalenti (ottenuti sottraendo l'ultima con la penultima colonna), il valore attuale deve essere 0. *posso avere diversi flussi di cassa.*

4.8 Ammortamento americano

Le quote capitale vengono depositate verso una terza parte (in un fondo apposito) e capitalizzate a un tasso d'interesse j. Il montante finale, calcolato al tasso j, deve essere uguale a C (la terza parte potrebbe essere una delle due parti).

Esempio 11 *Supponiamo che il rimborso avvenga a rate costanti pari a Q.*

$QS_{n|j} = C \qquad Sn \mid j = \frac{(1+j)^n - 1}{j}$

0				C
1	Q	Ci	$Q + Ci$	C
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	Q	Ci	$Q + Ci$	0

Se $i = j$ ottengo un rimborso a rate costante e la colonna delle rate è identica a quella ottenuta col metodo francese.

L'ammortamento tedesco è la stessa cosa degli altri, bisogna solo tenere conto che viene prestato $C - Cd$

0	0	0	0	$C - Cd$
n	$C - Cd$	$(C - Cd)i$	$(C - Cd)(1 + i)$	0

$$\begin{array}{|c|} C - Cd \\ \hline (C - Cd)(1 + i) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} C - Cd \\ \hline -C \\ \hline \end{array}$$

5 Operazioni finanziarie

$\vec{X}/\vec{t} = (x_1, \cdots, x_n)/(t_1, \cdots, t_n)$

Supponiamo di avere $\vec{X}/\vec{t}$ e $\vec{Y}/\vec{s}$: come posso esprimere preferenze?
Si introduce una nozione di equivalenza sull'insieme delle operazioni finanziarie $\vec{X}/\vec{t} \succeq \vec{Y}/\vec{s}$. Posso confrontare con l'operazione finanziaria nulla $\vec{0}/\vec{t}$.
Introduco $\phi \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e $\succeq$ su ϕ. Anzichè considerare come concetto primitivo una relazione binaria, cioè partire da $\succeq$ per poi fare delle scelte, si può

partire dall'idea di preferenza come idea primitiva e da essa introdurre una relazione di equivalenza.
Considero $\phi \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, associo Z (insieme delle operazioni finanziarie) associo la scelta $Z \subseteq \phi \to c(Z) \subseteq Z$ (REVELED PREFERENCES).
Considero c, la scelta, come concetto primitivo. Si può vedere c come indotto da una relazione binaria?
Quest'approccio ha rilevante interesse epistematico. Non si chiede nulla al decisore, ma osservando le sue scelte si va a stabilire in maniera oggettiva le sue preferenze.

REA=rendimento economico attualizzato.
Si guarda al flusso di cassa prevedibilmente generato in termini di REA ed è un criterio per valutare se fare o meno eventuali operazioni finanziarie. REA ha vari nomi:

dcf:discounted cash flow VAN:valore attuale netto NVP:net present value

$\vec{X}/\vec{t}$ valuto a una data τ. Prendiamo $\tau = 0$, faccio la somma delle varie entrate e uscite:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \nu^{t_k} = VAN(\vec{X}/\vec{t}) \qquad \text{attualizzando alla data } t^k.$$

Siano $\vec{t} = (1, 2, \cdots, n)$ $\vec{x} = (R, R, \cdots, R)$.
Si ha allora $VAN(\vec{X}/\vec{t}) = Ra_{n|i}$.
Se considero un τ qualsiasi

$$VAN_\tau(\vec{X}/\vec{t}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \nu^{t_k - \tau}$$

Se $\tau = n$ si ha $VAN_n(\vec{X}/\vec{t}) = RS_{n|i}$.
Nulla vieta di considerare un'operazione finanziaria a tempo continuo:
$t_1, \cdots, t_n$ sono i tempi con cui è fatta l'operazione, $x_1, \cdots, x_n$ sono i soldi e per convenzione le entrate sono cifre positive e le uscite negative. Le entrate possono essere dei ricavi da dei capitali investiti.(Chiedere un prestito è un'operazione finanziaria). Dire che un'operazione finanziaria è conveniente è come andarla a confrontare con una nulla.

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \nu^{t_k} \qquad \text{valutazione fatta a } \tau = 0.$$

$u : \theta \to \mathbb{R} \qquad \theta$ è l'insieme di tutte le operazioni finanziarie.
$\theta = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \cup (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \cup \cdots \cup (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \cup \cdots$
Potrei avere possibilità di scelta diverse. Il punto focale è la scelta del tasso d'interesse.

-2000	1200

-500	680	$\leftarrow$ ha il VAN più alto.

Supponiamo che entrambe siano fattibili, ma non duplicabili. Nella seconda avanzano 500 quindi bisogna trovare un impiego alternativo. Se non ho a disposizione i 1000:
supponiamo di avere 600

-500	600

-100	$x > 0$	posso fare questa operazione e mi restano 100 a disposizione.

oppure mi faccio prestare 400:

-1000	1200

400	$z < 0$

La seconda operazione ha a che fare con la durata:

		x
-1000	1200	
-1000	0	1400

questi esempi servono a mettere in guardia da un uso troppo ingenuo del valore attuale.

In questi esempi stiamo supponendo che il tasso d'interesse sia costante in un periodo di tempo abbastanza lungo, cosa che non è vera.
Supponendo di investire 1000 e di ricavare in due tempi diversi 600 e ancora 600 faccio due diverse attualizzazioni. C'è questo nuovo elemento:

introdurre i vari v_i che rendono più precise le valutazioni, ma complicano il problema.

TIR: Tasso interno di riferimento *IRR*: Intrnal rate of return

Si sfrutta il valore attuale $VA(\nu) = \sum_{k=1}^{n} x_k \nu^{t_k}$ che in generale non è un polinomio, ma quando lo è, ovvero se $t_k = k$ (t_k equidistanziati) posso andare alla ricerca degli zeri. Se si fa la valutazione nell'istante τ (primo movimento di flusso di cassa), viene posto $\tau = t_1$. Il primo t_k abitualmente è 0. $t_k = k$, $k = 0, \cdots, n$ quindi $n+1$ periodi ; allora $\sum_{k=0}^{n} x_k \nu^{t_k}$ è un polinomio (nel caso t_k equidistanziati). Gli x_k possono avere segni qualsiasi. Nel caso della rendita si ha:
$x_0 = -A\,, x_1, \cdots, x_n = R$; qui il segno degli x_k è arbitrario.

-100	200	$\leftarrow \nu = 1/2 \qquad i = 100\% = 1$
200	$-\,200$	

La prima è una possibilità d'investimento. Se nella parte iniziale ci sono delle somme negative significa che stiamo facendo un'investimento. se chiedo un prestito la situazione si ribalta. Per il VAN bisogna richiedere un tasso d'interesse i, qui invece non bisogna fare alcuna ipotesi.

TAEG: Tasso annuo effettivo globale (per def. vedi Cacciafesta)

L'obbligo di applicare il TAEG deriva da un decreto e aumenta la trasparenza delle operazioni finanziarie. Un progetto d'investimento può avere TIR non univocamente determinati.

5.1 Prestiti obbligazionali (prestiti divisi)

Valutazione di un'obbligazione:

$VAN_\tau(\vec{X}/\vec{t}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \nu^{t_k - \tau} = \sum_{k=1}^{n} c \cdot i \cdot \nu^{k-\tau} + \hat{C}\nu^{n-\tau}$

(flusso di denaro attualizzato con v)

$$\text{Cedole} \begin{array}{l} \nearrow \ \text{Capitale nominale} \\ \searrow \ \text{Tasso d'interesse nominale} \end{array}$$

Esempio 12

$100C$

5 cedole $\quad (5 = 100 \cdot 0,05)$

$0,05i$

$\hat{C}$: capitale rimborsato alla scadenza ($\hat{C}$ potrebbe anche essere diverso da C)
$VAN_\tau(\vec{X}/\vec{t})$ è il VA dei compensi futuri che riceverete.
Prezzo d'emissione $C\prime >=< C$
$C' < C$ emissione sotto la pari
$C' = C$ emissione alla pari
$C' > C$ emissione sopra la pari
Se $C' = C$ e $\hat{C} = C$ usando $\nu = \frac{1}{1+i}$, ho che $VA = C$
Se non è vero questo ho ilproblema effettivo di trovare il TIR
Ho questa operazione finanziaria:
C' alla data 0
C_1 alla data $1, ..., n$
$\hat{C}$ alla data n
i e ν non sono più strettamente legati. Il problema diventa trovare ν Per ora ho fatto tutto alla data 0 perchè sto calcolando tutto alla data dell'emmissione, ma le formule possono essere estese al caso generale.

$\sum_{k=2}^{5} c \cdot i \cdot \nu^{k-\tau} + \hat{C}\nu^{5-\tau}$
Sto comprando la cedola non più sul mercato primario, ma su quello secondario.(Caso primario: acquisto alla data d'emissione).

C capitale nominale
$\hat{C}$ capitale rimborsato alla scadenza
C' prezzo d'emissione
i_0 tasso d'interesse nominale

$-C'$	Ci_0	$\cdots$	$Ci_0 + \hat{C}$
0	1	$\cdots$	n

$$\text{TIR:} \qquad C' = \sum_{k=1}^{n} ci_0\nu^k + \hat{C}\nu^n \qquad \text{prezzo d'emissione}$$

$$\underline{P} = \sum_{k>\tau} ci_0\nu^{k-\tau} + \hat{C}\nu^{n-\tau}$$

$\underline{P}$ è il prezzo di un'obbligazione
Esistono il corso "tel quel" e il corso "secco"
Corso "secco" $\leftarrow$ escluso il pagamento della cedola che sta per maturare. Acquisto usa cosa privata del pagamento della cedola, siccome non è giusto che vengano aggiunti i dietimi d'interesse da pagare. Molti piani di ammortamento richiedono un rimborso graduale del capitale.
In circolazione esistono obbligazioni indicizzate:
BOT=Buoni ordinari del tesoro (zero coupon)
BTP=Buoni del tesoro poliennali
CCT=Certificati di credito del tesoro
(i_0 è indicizzato tipicamente rispetto ai BOT: ogni volta ricavo il tasso d'interesse annuale dei BOT e vi aggiungo qualcosa) *N.B.* Se si fa un mutuo a tasso variabile questo deve essere ancorato a qualche cosa di indipendente dalle parti.

5.2 Duration

Consideriamo una generica operazione finanziaria $\vec{X}/\vec{t}$ e un τ qualsiasi. Suppongo di conoscere $\nu(\tau, s)$ fattore di attualizzazione.

$\tau = 0$	$s = 1$	
-100	105	$\nu(0,1)$

Potrebbe darsi che se investo per più tempo ho un guadagno maggiore (o minore) di quello che aspetto.

$\tau = 0$	$s = 2$	
-100	113	$\nu(0,2)$ 113 è maggiore di 105 composto

Non c'è alcun motivo per cui i del primo periodo debba essere uguale a i del secondo periodo.
Questo esempio rappresenta la struttura per scadenza dei tassi d'interesse.

Esempio 13 *Dati gli x_i alla data t_i; $i = 1, ..., n$*
Voglio riportare tutto alla data ν
$x_1\nu^{t-\tau}$
$x_1\nu^{t_1-\tau} + ... + x_n\nu^{t_n-\tau}$ = *valore attuale al tempo τ*

Duration: è la durata di un'operazione finanziaria. La duration è una media dei tempi pesata (con gli x_i). I pesi vengono tutti attualizzati al tempo τ

$$D(\tau,\vec{X},\vec{t}) = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k-\tau)x_k\nu(\tau,t_k)}{\sum_{k=1}^{n}x_k\nu(\tau,t_k)}$$

Per esempio per uno zero coupon bond la duration è il tempo dello zero coupon bond stesso.

5.3 Rendita a rate costanti

Posticipata, durata n che non dipende dalla rata.

$$D(0,\vec{X},\vec{t}) = \frac{1}{1-\nu} - \frac{n\nu^n}{1-\nu^n} = \frac{1+i}{i} - \frac{n}{(1+i)^n-1}$$

Sto considerando un dato i e la ν collegata (una struttura di scadenza piatta) Per $\nu<1$ e $n\to\infty$ si ha che la duration di una rendita perpetua è $\frac{1}{1-\nu}$. se ho un portafoglio di titoli, ognuno di questi titoli ha una propria duration. La duration del portafoglio è la media pesata fra le varie duration e i pesi sono i vari VA. Se serve un titolo che abbia una duration di tot. anni vado a creare un portafoglio in modo che abbia duration di tot. anni (un singolo titolo è un portafoglio particolare)

$$D^{(2)}(\tau,\vec{X},\vec{t}) = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k-\tau)^2x_k\nu(\tau,t_k)}{\sum_{k=1}^{n}x_k\nu(\tau,t_k)} \qquad \text{Duration del secondo ordine}$$

$$\sqrt{D^{(2)}(\tau,\vec{X},\vec{t})} \qquad \text{Dispersione temporale}$$

$$V(0,\vec{X},\vec{t}) = \sum_{k=1}^{n}x_k\nu(0,t_k) = \sum_{k=1}^{n}x_k\nu^{t_k} = \sum_{k=1}^{n}x_k(1+i)^{-t_k}$$

Devo avere a disposizione la struttura a scadenza dei tassi d'interesse

$$\frac{\partial V}{\partial i}(0,\vec{X},\vec{t}) \overset{(\star)}{=} \sum_{k=1}^{n}x_k(-t_k)(1+i)^{-t_k-1}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial i^2}(0,\vec{X},\vec{t}) = \sum_{k=1}^{n}x_k(t_k)(t_k+1)(1+i)^{-t_k-2}$$

$$D(0,\vec{X},\vec{t}) = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k x_k (1+i)^{-t_k}}{V(0,\vec{X},\vec{t})}$$

$$-\frac{D(0,\vec{X},\vec{t})}{1+i} = \frac{\partial V}{\partial i}(0,\vec{X},\vec{t})/V(0,\vec{X},\vec{t}) \qquad (\star\star)$$

$(\star)$ è il coefficiente di variazione di VA per piccoli spostamenti.
$(\star\star)$ è la variazione relativa del VA; questa grandezza relativa è detta SEMIELASTICITA' o anche derivata logaritmica di V. Una domanda sul mercato mi dice la quantità della domanda rispetto ai prezzi

$$\frac{\frac{\frac{\partial V}{\partial i}}{V}}{\frac{\frac{\partial i}{\partial i}}{i}} = i \cdot \frac{\frac{\partial V}{\partial i}}{V} = -\frac{i}{1+i} D(0,\vec{X},\vec{t})$$

Se considero due zero coupon bond con durata diversa, a dura un'anno e alla fine avrò 110, b dura 2 anni e alla fine avrò 121. sto immaginando di essere in una struttura piatta. Suppongo che ci sia una variazione di i che passa da 0,1 a 0. Qual'è il valore attuale degli zero coupon bond? 110 per a e 121 per b. b è aumentato del doppio perchè la duration è doppia. E questo è ragionevole perchè si rimane con b per un periodo più lungo esposti alle intemperie del mercato.

" CONVEXITY " $\quad \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial i^2}}{V}$

"CONVEXITY RELATIVA" $\quad \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial i^2}}{\frac{\partial V}{\partial i}}$

Vengono applicate in un contesto preciso che prende il nome di 'immunizzazione': un tentativo di rendersi immuni dal rischio di variazioni d'interesse.

$$\frac{\partial V}{\partial \nu}(\tau,\nu) = \frac{V(\tau,\nu)}{\nu} D(\tau,\nu)$$

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial \nu}(\tau,\nu)}{V(\tau,\nu)} = \frac{1}{\nu} D(\tau,\nu)$$

La variazione del valore attuale è proporzionale alla duration. Se ho flussi di cassa positivi con una certa duration, il VA dice come questi siano sensibili alla variazione del tasso d'interesse.

110 | 121 | $\tau = 0,1.$ $\quad VA = 100$

1 | 2 | $\tau = 0$ $\quad VA = 110$

$VA = 121$

La variazione è 0 quando la derivata è 0.
$D(\tau, \nu) = D(0, \nu) - \tau$ cioè dire che $D(\tau, \nu)$ è zero è come dire che la duration al tempo 0 è pari a τ. Si ha derivata identicamente 0 nell'istante τ corrispondente alla duration al tempo 0.

Se si deve restituire 1 alla data τ significa che si ha una somma alla data 0 che al tasso d'interesse vigente vale 1 alla data τ. Se sul mercato esistesse uno zero-coupon bond che scade alla data τ (con rimborso uguale a 1 alla data τ) saremmo a posto (solo in caso di condizioni di certezza).

Esempio 14 *Da pagare* 100 *alla data* 3.

0 3

Sul mercato sono disponibili solo o zCB $0,5$ *o* zCB 10
$\nu = 1/1,1$ *abbiamo* $100 \cdot \nu^3$ *(non abbiamo intenti speculativi)*
Costruisco un portafoglio prendendo α_1 *del primo* zCB *e* α_2 *del secondo. Ovviamente devo poterlo comprare.*
$\alpha_1 \cdot 1,1^{-0,5} + \alpha_2 \cdot 1,1^{-10} = 100 \cdot 1,1^{-3}$.
Equazione di primo grado a due incognite. Questo vuol dire che posso scegliere come voglio. Il teorema degli zeri mi garantisce che ci sarà almeno un valore per cui la duration vale 3.

Faccio la media pesata dei tempi per le quantità dei flussi attualizzata.
$0,5\alpha_1 \cdot 1,1^{-0,5} + 10\alpha_2 \cdot 1,1^{-10} = 3 \cdot 100 \cdot 1,1^{-3}$. *Metto a sistema e ottengo:*

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot 1,1^{-0,5} + \alpha_2 \cdot 1,1^{-10} = 100 \cdot 1,1^{-3} \\ 0,5\alpha_1 \cdot 1,1^{-0,5} + 10\alpha_2 \cdot 1,1^{-10} = 3 \cdot 100 \cdot 1,1^{-3} \qquad det \neq 0 \end{cases}$$

Possiamo calcolare α_1 *e* $alpha_2$*:* $\alpha_1 \simeq 58,06$ *e* $\alpha_2 \simeq 51,28$ *e ottengo che se varia:*

1 *ν in $\overline{\nu}$ (variazioni non troppo grandi).*

2 *Spostamenti paralleli.*

3 *Vicino a* 0 *non varia la situazione altrimenti devo ricalibrare rifacendo i conti.*

Se ho una variazione del tasso d'interesse l'effetto del prim'ordine è nullo in τ e l'effetto del second'ordine è maggiore o uguale di 0, sempre nell'ambito di piccoli cambiamenti.
ν zCB un anno
ν^{10} zCB dieci anni
È abbastanza usuale che il tasso d'interesse per investimenti di lunga durata sia più alto che per quelli di breve durata.

$$\nu(0, ...) = \sum_{k=1}^{n} x_k \nu(0, t_k) \qquad \nu(\tau, ...) = \sum_{k=1}^{n} x_k \nu(\tau, t_k)$$

Se fossimo nel caso semplificato avrei ν^{t_k} nel primo caso e nel secondo $\nu^{t_k - \tau}$.
$\nu(0, t_k) = \overline{\nu}^{t_k}$ esiste la possibilità di esprimere in maniera semplificata.
Noi immaginiamo che ciascun periodo sia investito dalla stessa variazione di tasso d'interesse. Questo si intende per SPOSTAMENTO PARALLELO.
Sono immunizzato per spostamenti paralleli.
$\nu(\tau, t_k)$ x al tempo $t_k \Leftrightarrow \nu(\tau, t_k)$ al tempo τ
$zCB \quad \nu(s, t)$ è VA al tempo s di zCB unitario che scade al tempo t.
$\nu(s, t) = \nu^{t-s}$ struttura piatti $\nu(s, t)\nu(t, u) = \nu(s, u)$ sono verificabili empiricamente.

5.4 Condizioni di rischio

Il criterio naturale di scelta dovrebbe essere quello del guadagno atteso, tuttavia non è quello utilizzato dal decisore.

Esempio 15 *Si ha da scegliere tra due casi possibili:*
1000 euri certi oppure 0 euri o 2000 euri con probabilità di un mezzo ciascuno. Hanno lo stesso guadagno atteso.

Esempio 16 *Il premio assicurativoequo è qualcosa che dò con certezza all'assicurazione e in cambio ho la copertura su eventuali rischi. Posso calcolare la perdita attesa. Il premio equo è qualcosa che devo pagare all'assicurazione affinché il mio guadagno atteso sia zero. Ovviamente le assicurazioni richiedono un premio maggiore di quello equo. tuttavia la gente si assicura perchè le decisioni in questo caso non vengono fatte col criterio del guadagno atteso.*

5.5 Utilità attesa

Questo criterio funziona al di là della applicazione a somme monetarie.
$u : I \to \mathbb{R} \quad I$ intervallo di $\mathbb{R}$. cosa significa $u(x)$?

x può essere interpretato come ricchezza complessiva o come variazione della ricchezza. La differenza è una costante. $u(x)$ è il grado di soddisfazione di un decisore.

Esempio 17 *Supponiamo* $u(x) = \sqrt{x}$ $\quad x$ *variazione della ricchezza.*
$u(1000) = \sqrt{1000}$. *L'altro caso era* $1/2u(0) + 1/2u(20000) = \sqrt{2000}$ *Questo significa che sto calcolando il valore atteso della variabile aleatoria dell'utilità attesa dal guadagno, mentre prima calcolavo il guadagno atteso. Il decisore preferisce avere i* 1000 *piuttosto che partecipare alla lotteria.*

Il termine speculazione fa riferimento al fatto che le due parti hanno aspettative diverse rispetto al futuro.

Lotteria: distribuzione di probabilità demplice su I. $p : I \to [0,1]$ t.c. $p(x) \neq 0$ solo per un numero finito di elementi di I. Criterio dell'utilità attesa: un decisore è caratterizzato da una funzione d'utilità. Le lotterie possono essere indicate con una $2n$-upla $L = (x_1, p_1; ...; x_n, p_n) \in \mathbb{R}^{2n}$.
Considero una lotteria e ne calcolo l'utilità:
formalmente $\Delta(I)$ è l'insieme delle lotterie su I.
$\overline{u}$: estensione di u da I a $\Delta(I)$ per linearità ($x \in I \to \partial_x \in \Delta(I)$)
$u(L) = [\overline{u}(L)] = \sum_{k=1}^{n} p_k u(x_k)$
Quando dovrò confrontare due lotterie, andrò a confrontare $L = (x_i, p_i)_{i=1}^{n}$ e $L' = (y_i, q_i)_{i=1}^{m}$. Andrò a calcolare $u(L)$ e $u(L')$ e valuterò quale ha l'utilità attesa maggiore. Importanti sono i p_k: se sono dati siamo in caso di decisioni in condizioni di rischio, altrimenti siamo in caso di decisioni in condizioni di certezza.

Esempio 18

xxxxxxxxx grafico xxxxxxxx	$u(x) = \sqrt{x}$ $\quad x$ *variazione della ricchezza.*
xxxxxxxxx grafico xxxxxxxx	$L = (1000, 1)$. *L'altro caso era*
xxxxxxxxx grafico xxxxxxxx	$L' = (0, 1/2; 2000, 1/2)$
xxxxxxxxx grafico xxxxxxxx	*Si può fare una valutazione geometrica.*
xxxxxxxxx grafico xxxxxxxx	$u(L') = 1/2u(0) + 1/2u(2000)$
xxxxxxxxx grafico xxxxxxxx	*Si considera la similitudine*
xxxxxxxxx grafico xxxxxxxx	*fra i triangoli*
xxxxxxxxx grafico xxxxxxxx	*Se fosse stata* $L'' = (0, 3/4; 2000, 1/4)$
xxxxxxxxx grafico xxxxxxxx	
xxxxxxxxx grafico xxxxxxxx	
xxxxxxxxx grafico xxxxxxxx	

Ritornando al grafico di L e L'.
Il punto a identifica il punto 1000*, ma rappresenta anche la lotteria L' (come se fossero due grafici sovrapposti): sempre a questo punto ho associato $u(L')$.*
Il punto $x_{L'}$ lo vedo nel grafico della u e degli eventi certi.
L'utilità $\underbrace{u(x_{L'})}_{\textit{evento certo}} = \underbrace{u(L')}_{\textit{utilità attesa } \overline{u}(L')}$

$x_{L'}$ *si chiama* equivalente certo *della lotteria L'*
Abbiamo trovato che $x_{L'}$ è più piccolo di 1000 *visto come il guadagno atteso nel nostro disegno $x_{L'} < 1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot 2000$. Non è un fatto casuale ede è dovuto alla concavità di u. se u è concava diremo che il decisore è (debolmente) avverso al rischio; se u è strettamente concava diremo che il decisore è avverso al rischio.*
È la presenza dello spazio tra valore atteso e equivalente certo che fa si che si stipulino contratti assicurativi.

Considero una lotteria $L = (x_i, p_i)_{i=1}^n$ posso fare diversi calcoli:
$u(L) = \sum_{i=1}^n p_i u(x_i)$ oppure $u\big(\sum_{i=1}^n p_i u(x_i)\big)$ ovvero interpreto il guadagno atteso come evnto certo e ne calcolo la u. Costruisco cioè un'altra lotteria $\overline{L} = \big(\sum_{i=1}^n p_i u(x_i), 1\big)$. L'idea di avversione al rischio corrisponde al fatto che uno preferisce il guadagno atteso certo, piuttosto che lasciarsi al caso.
Ovvero $u\big(\sum_{i=1}^n p_i u(x_i)\big) \geq \sum_{i=1}^n p_i u(x_i) \qquad (i)$
$\geq$ debolmente avverso al rischio.
$>$ avverso al rischio

Questa è l'idea da formalizzare. I miei dati sono u,L. Si può pensare che l'avversione al rischio sia una caratteristica solo del decisore e quindi dipenda solo da u. Falso. Dipende sia da u che da L.

Esempio 19

xxxxxxxxx grafico xxxxxxxx	*Una funzione d'utilità simile*
xxxxxxxxx grafico xxxxxxxx	*rappresenta sia una disuguaglianza*
xxxxxxxxx grafico xxxxxxxx	*che l'altra.(Non rappresenta*
xxxxxxxxx grafico xxxxxxxx	*atteggiamenti incongrui del decisore).*

Si può dire che un decisore manifesta avversione al rischio in corrispondenza di una lotteria L se vale (i). Se vale la disuguaglianza opposta si dice che manifesta amore per il rischio. Se il decisore manifesta (debole) avversione al rischio qualunque L, si ha che vale sempre la relazione (i). Equivale a dire che u è concava.

$u: I \to \mathbb{R}$ I intervallo di $\mathbb{R}$ "decisore razionale". Preferisce
$L = (x_i, p_i)_{i=1}^n$ a $L' = (y_j, q_j)_{j=1}^m$ se e solo se $\sum_{i=1}^n p_i u(x_i) \geq \sum_{j=1}^m q_j u(y_j)$
Equivalente certo di una lotteria L: $x_L \in I$ t.c. $u(x_i) = \sum_{i=1}^n p_i u(x_i)$
$u\big(\sum_{i=1}^n p_i u(x_i)\big) \geq \sum_{i=1}^n p_i u(x_i)$ avversione al rischio
Per le decisioni su somme monetarie attualizzo a vari istanti in corrispondenza di diversi stati di natura e peso con i p_i.

Indice di Arrow-Pratt di avversione al rischio: $-\frac{u''(x)}{u'(x)}$ divido per $u'^{(x)}$ in modo da ottenere un'indice che non dipende dalla arbitraria funzione di utilità.

Esercizio 2 $-\frac{u''(x)}{u'(x)} = a$ *trovare delle funzioni di utilità che hanno avversione al rischio costante.*

$u(L) = \sum_{i=1}^n p_i u(x_i)$ $\qquad L$ è una lotteria.
$L = (x_i, p_i)_{i=1}^n$ $\qquad L$ valore x_i con probabilità p_i
Di fronte a due lotterie con lo stesso guadagno atteso sembra si preferisca quella con arianza minore se sono avverso al rischio.
Supponiamo che u sia sviluppabile secondo Taylor. Suppongo che u sia un polinomio di secondo grado. Considero due lotterie: L e L' con identico guadagno atteso.$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \sum_{j=1}^n q_j y_j = x_0$.
Faccio lo sviluppo di Taylor con un punto di partenza x_0.

$$u(x) = u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0) + 1/2\ u''(x_0)(x - x_0)^2$$

Ho considerato u di secondo grado, ma c'è un po' di arbitrarietà nella scelta si u. Aggiungo $-u(x_0)$; moltiplico per $\alpha = \frac{1}{u'(x_0)}$. È come dire: considero

$$v(x) = \alpha u(x) + \beta = \frac{1}{u'(x_0)} u(x) - u(x_0) \quad v'(x) = \frac{1}{u'(x_0)} u'(x) \quad v''(x) = \frac{u'(x)}{u''(x_0)}$$

Se scrivo lo sviluppo di Taylor per $v(x)$ ottengo:

$$v(x) = (x - x_0) + \tfrac{1}{2} v''(x_0)(x - x_0)^2$$

Da notare che $v''(x_0) = -$(Indice di Arrow-Pratt in x_0). A questo punto posso considerare l'utilità delle lotterie.

$$v(L) = \sum p_i v(x_i) = \sum p_i (x_i - x_0) + \tfrac{1}{2} v''(x_0) \underbrace{\sum p_i (x_i - x_0)^2}_{\text{Varianza della lotteria}}$$

$$= \tfrac{1}{2} v''(x_0) \cdot \mathrm{Var}(L)$$

essendo $\sum p_i (x_i - x_0) = 0$

$v(L') = \frac{1}{2}v''(x_0) \cdot \mathrm{Var}(L')$ quindi si ha:

$v(L) > v(L') \Leftrightarrow \mathrm{Var}(L) < \mathrm{Var}(L')$

Assumo che il decisore sia avverso al rischio per cui il decisore sceglierà l'investimento meno aleatorio.

L'idea è di passare dalla u del decisore a qualcosa di più oggettivo come la varianza. È difficile esprimere e conoscere le singole funzioni di utilità.

5.6 Contratto d'assicurazione

Esiste v valore della "cosa" , somma di danaro ed esiste p probabilità che il "sinistro" si verifichi durante un dato periodo di tempo. Si ha:

$p \to -v$ con probabilità p si perde tutto.

$1 - p \to 0$ con probabilità $1 - p$ nulla.

("variazione della ricchezza totale")
Non si tiene conto del problema di attualizzazione. ALTRO DECISORE (è una persona giuridica una "Spa") che offre il contratto: si dà un P "premio" immediato e l'altro decisore si accolla la perdita in caso si avveri il sinistro. Il decisore può scegliere se:

assicurarsi, pagando $-$P con probabilità 1.

non assicurarsi, pagando 0 con probabilità $1 - p$ e $-v$ con probabilità p

Dato che il contratto si fa in due il valore P deve essere tale che per la Spa convenga assicurare. *Premio equo* (il termine equo ha una valenza etica, ma deriva da operazioni matematiche) $P_e = pv$ è il guadagno certo che è identico al guadagno atteso dalla lotteria.

xxxxxxx grafico xxxxxxxx	0 corrisonde al fatto
xxxxxxx grafico xxxxxxxx	che non avvenga il sinistro.
xxxxxxx grafico xxxxxxxx	u funzione di utilità
xxxxxxx grafico xxxxxxxx	dell'assicurando

Ho $\alpha u+\beta$. β lo scelgo in modo che $u(0) = 0$ e α in modo che $u(-v) = -1$. P_u è l'equivalente certo della lotteria per il decisore è l'evento certo che realizza l'uguaglianza $u(-P_u) = pu(-v) + (1 - p)u(0) = -p - P_u = u^{-1}(-p)$. Le as-

sicurazioni esistono grazie alla persona dell'intervallo $(-P_u, -P_e)$. Immagino che un P tale che $P_e < P < P_u$. Se l'assicurazione chiede un premio P che soddisfa queste condizioni allora il contratto verrà certamente sottoscritto. $u(-P) > u(-P_u) = pu(-v) + (1-p)u(0)$. Il contratto sarà sottoscritto dall'assicurando grazie alla diseguaglianza $P < P_u$ e dalla Spa perchè non è avversa al rischio. La sua funzione di utilità è $v(x) = x$, il criterio di scelta da lei utilizzato è il guadagno atteso. Se il contratto viene stipulato la compagnia di assicurazioni ottiene con probabilità p P-V e con probabilità $1-p$ P. l'utilità attesa è $pv(P-V)+(1-p)v(P) = p(P-V)+(1-p)P = P-pV = P-P_e$ quindi chiede un premio $P > P_e$.
N.B. Non è solo il guadagno atteso che può essere utilizzato come criterio di valutazione.

5.7 Dominanza stocastica

Ho due lotterie L e L'. Dico che L domina stocasticamente L' se:

$$F_L(x) \leq F_{L'} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

dove F è la funzione di ripartizione delle variabili aleatorie L e L'.

xxxxxxx grafico xxxxxxxx	Le funzioni di ripartizione
xxxxxxx grafico xxxxxxxx	vanno da 0 a 1
xxxxxxx grafico xxxxxxxx	
xxxxxxx grafico xxxxxxxx	

L domina stocasticamente L'

$$L(x_1, \tfrac{1}{2}; x_2, \tfrac{1}{2}) \quad F(x) = Prob(L \leq x) \quad F(x') = Prob(L \leq x_1) = \tfrac{1}{2}.$$

Così costruisco la mia funzione di ripartizione:

$$L(x_1', \tfrac{2}{3}; x_2', \tfrac{1}{3}) \quad u(L) = \tfrac{1}{2}u(x_1) + \tfrac{1}{2}u(x_2)$$

$$u(L') = \tfrac{2}{3}u(x_1') + \tfrac{1}{3}u(x_2') = \tfrac{1}{2}u(x_1') + \tfrac{1}{6}u(x_1') + \tfrac{1}{3}u(x_2') < \tfrac{1}{2}u(x_1) + \tfrac{1}{2}u(x_2') =$$

$$= \tfrac{1}{2}u(x_1) + \tfrac{1}{2}u(x_2) = u(L)$$

Se L domina stocasticamente L' l'utilità attesa di L è maggiore dell'utilità attesa di L'.
Questa conclusione tratta da un esempio vale in generale.

La dominanza stocastica è un criterio che ci dice quando qualunque decisore preferirà una lotteria a un'altra.

Osservazione Se L domina stocasticamente L' allora il guadagno atteso da L è maggiore del guadagno atteso da L'.

5.8 Dominanza stocastica del secondo ordine

Data L, data F_L, definisco $A_L(x) = \int_{-\infty}^{x} F_L(t)dt$ cioè l'area che sta sotto la funzione di ripartizione.

xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx	Per la presenza di questo tratto
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx	ho $F_L > F_{L'}$
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx	
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx	

Non ho la dominanza stocastica del primo ordine però se il tratto è piccolo posso comunque dire qualcosa. Posso richiedere la dominanza stocastica del secondo ordine.

$A_L(x) \leq A_{L'}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$ e $<$ per almeno un x

Teorema Se L domina stocasticamente L' al secondo ordine, allora $u(L) > u(L')$ per ogni $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia strettamente crescente e concava.

Senza conoscere la funzione d'utilità dell'individuo, sono sicura che le preferenze privileggeranno L anziché L'. Questa parte è utile per studiare la teoria della selezione del portafoglio.

5.9 Teoria della selezione di un portafoglio, rendimento di un portafoglio

Dato un portafoglio si considerano il rendimento medio e la varianza (vista come parametro oggettivo). A monte c'è l'oggettività del decisore.

A valore del portafoglio oggi.
M valore del portafoglio alla fine del periodo considerato.
$\frac{M-A}{A}$ rendimento, è il tasso d'interesse con la differenza che M è una variabile aleatoria.

Quindi vado a calcolare: il valore atteso e la varianza (scarto quadratico medio)

xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx	Ogni portafoglio avrà il suo
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx	valore medio e il suo scarto
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx	quadratico medio (valutazioni
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx	di tipo statistico).

Per ogni portafoglio ho a disposizione una coppia (σ, m) e un suo punto sul grafico

Esempio 20 *a ha un rendimento maggiore e una varianza minore di b. tutto ciò che si trova nella zona tratteggiata è altamente non preferibile ad a. Si cerca quindi una massimizzazione di* m *e una minimizzazione di* σ *mentre a e c vengono trattati alla pari.*

Potrei avere due portafogli con uguale varianza, uguale valore medio, ma un decisore potrebbe preferirne uno all'altro (piano soggettivo) Abbiamo una serie di punti: alcuni vanno scartati in quanti sono dominati, altri vanno tenuti. Infatti questi ultimi costituiscono la *frontiera efficiente*

xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx

Se siamo in un ambito di lotterie in cui l'approssimazione quadratica è molto buona, possiamo considerare solo m e σ
L lotteria su I.

xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx

dato che sono interessato a m e σ e queste hanno a che fare con i rendimenti, se sono normali hanno a che fare con distribuzioni di probabilità normale. È ragionevole supporre che i rendimenti dei titoli siano distribuiti in modo normale? No, esistono approssimazioni migliori.

xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx - depositi bancari $\sigma = 0$
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx - bot
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx - detenzione di contante
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx - distruzione di capitale $m = -1 \quad \sigma = 0$

Si potrebbe inglobare la teoria della scelta del portafoglio per scelte più complessive acquisto e consumo. supponiamo di avere $A_1 = Generali$ e $A_2 = STM$. Nessuno ci obbliga a comprere solo A_1 o A_2, posso costruirmi un portafoglio.

$$(A_1, x_1; A_2, x_2) \qquad x_1 + x_2 = 1 \quad x_i \geq 0$$

Così è normalizzata. C'è anche la possibilità $x_i < 0$ che corrisponde alla vendita allo scoperto del titolo: non ho azioni eppure le vendo, dò un ordine di vendita su titoli che non possiedo, con ovvi accordi di garanzia.
Il rendimento medio del portafoglio che costruisco non è altro che la media pesata: $x_1 m_1 + x_2 m_2$
Varianza del portafoglio: $\sigma^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$ dove
ρ_{12} è l'indice di correlazione
$\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$ è la covarianza
$-1 \leq \rho_{12} \leq 1$ e quando $\rho = 1 \quad A_1$ e A_2 sono strettamente correlate.
Supponiamo di avere due titoli con lo stesso rendimento medio. ogni volta che A_1 sale, A_2 scende quindi A_1 e A_2 sono strettamente correlati negativamente ($\rho = -1$). Se compro metà dell'una e dell'altra la varianza diventa 0. Elimino il rischio. Ho un portafoglio privo di rischio. Supponiamo di avere due titoli:

$$A_1 \quad m_1 \quad \sigma_1$$

$$A_2 \quad m_2 \quad \sigma_2$$

e di comporre il portafoglio $(A_1, x_1; A_2, x_2)$, dove $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$m_1 = m_1x_1 + m_2x_2$$
$$\sigma_1^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_{12} \quad \text{dove} \quad \sigma_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2$$

Supponiamo $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, possiamo considerare $(\frac{x_1}{x_1+x_2}, \frac{x_2}{x_1+x_2})$. Se in particolare $x_1, x_2 \geq 0$ si avrà $0 \leq \frac{x_1}{x_1+x_2}, \frac{x_2}{x_1+x_2} \leq 1$ e la loro somma uguale a 1.

Esempio 21

	S_1	S_2	m	σ
A_1	110	100	5	5
A_2	100	110	5	5
$\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2$	105	105	5	0

Lavoriamo con valori e scarti quadratici percentuali.
$\frac{1}{2}110 + \frac{1}{2}100 = 105$
$\frac{1}{2}(110 - 105)^2 + \frac{1}{2}(100 - 105)^2 = 25$
È evidente che la varianza del portafoglio sia nulla.
$E((A_1 - m)(A_2 - m)) = \frac{1}{2}(110 - 105)(100 - 105) + \frac{1}{2}(100 - 105)(110 - 105) = -\frac{1}{2}25 - \frac{1}{2}25 = -25$ *covarianza* σ_{12}
$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{-25}{5 \cdot 5} = -1$ *Sono due titoli perfettamente correlati, ma negativamente.*

Se considero due titoli e tutte le combinazioni di portafoglio

xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx

al variare di x si ottiene una conica (iperbole) che può essere anche degenere. In figura, conica degenere che rappresenta due titoli perfettamente correlati.

xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx

Rappresenta un portafoglio privo di rischi

xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx

Se A_1 e A_2 sono abbastanza ben correlati ci troviamo alla destra di r (l'iperbole che li unisce). Più ci spostiamo a sinistra più sui rami di iperbole possiamo individuare un portafoglio con rischio sempre minore.

più mi avvicino ad A_2 spostandomi sul ramo di iperbole, più guadagno in termini di rendimento atteso, però aumenta il rischio.

Supponiamo di avere due titolicon uguale m e covarianza minore di 0. Chiamo $\lambda = x_1$ e $1 - \lambda = x_2$

$Var = \lambda^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2cov) + 2\lambda(cov - \sigma_1^2) + \sigma_2^2$

xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx

$\frac{d}{d\lambda}(Var) = 0$

$\Leftrightarrow$

$\lambda = \frac{\sigma_2^2 - cov}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2cov} = \frac{\sigma_2^2 - cov}{\sigma_1^2 - cov) + (\sigma_2^2 - cov)}$

xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx

$\overline{\sigma}$ è la varianza minore che riesco a ottenere. Quindi riesco a trovare una $\overline{\sigma}$ minore di σ_1 e σ_2

N.B. Questi conti possono essere fatti anche per titoli con m diversi negativamente correlati. ogni volta che ho due titoli negativamente correlati riesco a costruire un portafoglio con σ minore di σ_1 e σ_2.

	S_1	S_2	m
A_1	102	104	3%
A_2	110	100	5%

$-1A_1 + 2A_2$ ho 100 vendo 100 di A_1 allo scoperto

$-1A_1 + 2A_2$	118	96	7%

Ho due asset A_1 e A_2 componibili in un portafoglio. Ottengo un arco di curva. Poter vendere allo scoperto equivale a poter proseguire la curva oltre gli estremi. Se vendo vendo allo scoperto A_1 proseguo il tratteggio da A_2 e viceversa.

Per esempio, se è possibile vendere allo scoperto A_1, si ha: $x_1 < 0$ e $x_2 = 1 - x_1 > 1$.
Considero l'esempio seguente: ho due asset A_1 e A_2 di costo 100 inizialmente, la tabella mostra i portafogli:

$$\begin{array}{cccl} & S_1 & S_2 & \\ A_1 & 102 & 104 & \leftarrow 3\% \\ A_2 & 110 & 100 & \leftarrow 5\% \end{array}$$

Dove prob(S_1)=prob(S_2)= $\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{cccc} x_1 = -1 & x_2 = 2 & -A_1 + 2A_2 & \leftarrow \text{portafoglio} \\ & S_1 & S_2 & \\ & \text{-102+220} & \text{-104+200} & \\ & 118 & 96 & \leftarrow \text{portafoglio} \end{array}$$

Osservazione: è possibile componendo in questo modo andare in perdita. *Rendimento atteso*: $\frac{1}{2}118 + \frac{1}{2}96 = 107$. *Rendimento medio*: 7%. Si ottiene un rendimento maggiore dei singoli pari al 3% per A_1 e al 5% per A_2: questo non è possibile se non si riesce a vendere allo scoperto.

L'aumento del rendimento viene pagato in termini di rischio

$$\sigma_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}25 + \tfrac{1}{2}25} = 5$$
$$\sigma_p = \sqrt{\tfrac{1}{2}11^2 + \tfrac{1}{2}11^2} = 11$$

È aumentato il rendimento ma la varianza è più che raddoppiata. Scegliere tra A_2 e il portafoglio sta all'investitore e alle sue preferenze. Se avessi messo $x_1 = -10$ e $x_2 = 11$ avrei ottenuto risultati più marcati ma nella realtà ci sono dei limiti sulla possibilità di vendere allo scoperto. La frazione complessiva permessa di vendite allo scoperto relazionata al capitale è piccola. Molte volte la condizioni di vendita e di acquisto allo scoperto non sono le stesse.

Osservazione: si sta creando una specie di arbitraggio: per l'ente è più conveniente investire che prestare.
Supponiamo che un tizio compri una casa del valore pari a 100.000. Supponiamo che disponga della cifra, il fatto che si compri una casa crea le condizioni per richiedere un prestito, un mutuo con tassi abbastanza bassi e agevolazioni fiscali. Gli investimenti non hanno solo carattere finanziario: questo è l'equivalente di una vendita allo scoperto con tasso d'interesse basso.

Aliquota marginale

In Italia vige il principio di progressività dell'imposizione fiscale sui redditi delle persone fisiche (IRPEF). Se non si ha alcun tipo di progressività l'imposta aumenta proporzionalmente al reddito; se si ha proggressività l'imposta ammette più che progressione rispetto al reddito. Tipicamente la curva non è continua.È probabile che ci sia una parte iniziale di valore 0.

xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx	Le varie aliquote corrispondono
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx	ai diversi coefficienti
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx	angolari
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx	
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx	

Dal grafico il primo scaglione di reddito ha un'aliquota dello 0%, il secondo del 10%, il terzo del 20%, il quarto del 30%, il quinto del 40%. Il valore dell'imposta dipende dal reddito.
Aliquote marginali; ultima aliquota corrispondente allo scaglione di reddito in cui si va a collocare il rendimento complessivo. All'aumentare del reddito aumenta l'imposta.

5.10 Portafoglio con n titoli

Passiamo al caso più generale: consideriamo n titoli. n titoli di rendimento m_i sqm σ_1 non correlati, cioè $\rho_{ij} = cov_{ij} = 0$. Costruisco un portafoglio in cui gli n titoli sono ugualmente pesati, in cui ciascuno ha peso $\frac{1}{n}$. Ciascuna quota del titolo i-esimo mi da rendimento pari a $\frac{1}{n}m_1$, perciò $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}m_1 =$ rendimento atteso medio. La varianza:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}\sigma_i^2 + \sum_{i\neq j}\frac{1}{n^2}\sigma_{ii}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sigma_i^2 = \frac{1}{n}\bar{\sigma}$$

dove $\bar{\sigma}$ varianza media del portafoglio.
Supponiamo che le varianze dei titoli siano superiormente limitate, cioè $\sigma_i^2 \leq c$. Se abbiamo un numero elevato la quantità $\frac{1}{n}\bar{\sigma}$ è piccola a piacere. Questa diversificazione è in grado di abbattere il rischio. Effettuando la diversificazione ottengo un rendimento atteso medio non massimo: potrei preferire il titolo 7°, cioè $m_7\sigma_7$ rispetto a $\frac{1}{n}\sum m_i$ e $\sigma = 0$.

Osservazione: abbiamo assunto un'ipotesi forte ρ_{ij}.

Ciò che avviene realmente effettuando questa diversificazione con ugual peso è che una parte della varianza va a 0 mentre l'altra tende al suo valore medio. Avendo a disposizione n titoli rischiosi e costruendo tutti i possibili portafogli, ammettendo la possibilità di vendi ta allo scoperto, si ottiene la frontiera efficiente in figura.

xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx Grafico dei possibili
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx portafogli che riesco
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx a ottenere (illimitato)
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx

Si ha però a disposizione titoli più a rischio, per esempio A_0.

Esempio Costruisco un portafoglio con A_0 e A_1.

xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx

Dato che un titolo non è rischioso ho varianza nulla e anche la covarianza con l'altro titolo riesce nulla. Perciò considerando i vari portafogli ottengo un segmento nel piano $\sigma' m$. Se è possibile vendere allo scoperto A_0 al tasso m_0, è possibile prolungare il segmento oltre A_1. Avendo a disposizione anche titoli con $\sigma' s$ ho possibilità di considerare altri portafogli:

xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx

La frontiera efficiente è data dai portafogli non dominati. In figura A_1 è dominato. I punti tra A_0 e la tangente non sono dominati. Consideriamo il punto T,

xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx

Supponiamo che sia possibile vendere A_0 allo scoperto al tasso m_0. Ho trovato le migliori opportunità possibili: La semiretta mi da le migliori condizioni tra le possibili. Tutti e soli i portafogli maggiori della retta passante per A_0 e T non sono dominati. Per qualunque investitore la composizione ottimale del portafoglio è data mischiando A_0 e T. Questo prende il nome di *teorema dei due fondi*.

Chiunque investa in un portafoglio diverso da T sta effettuando una scelta non ottimale.

xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx

Un investitore ha soluzioni migliori rispetto all'investimento in titoli Eni: è addirittura più conveniente vendere allo scoperto. Se chi ha investito tutto in Gen avesse scelto il portafoglio P_1, avrebbe avuto uguale rischio e maggior guadagno; se avesse scelti P_2 avrebbe avuto ugual guadagno e minor rischio. Se non è possibile vendere allo scoperto si ha il *teorema dei tre fondi*.

xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx

dei tre fondi perchè per individuare la frontiera efficiente servono tre punti A_0 T P.

Se è possibile vendere A_0 allo scoperto ma non allo stesso tasso si ha il *teorema dei quattro fondi*.

xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx

La soluzione migliore sarebbe vendere allo scoperto quanto più è possibile.

Cosa sono gli stati di natura? Tipicamente uno stato di natura è un'oggetto combinato complesso. Andamento generale del mercato. Uno stato di natura può essere considerato "l'ottimismo generale".

In generale i movimenti di un titolo sono correlati all'andamento del mercato e da ulteriori elementi che dipendono dallo stato di natura che si è realizzato. Abbiamo a disposizione un'indice I con un suo rendimento atteso m_I e una sua varianza σ_I'. i_I è la variabile aleatoria che rappresenta il rendimento di questo indice. Considero il titolo j, i_j rendimento del titolo j-esimo.
$i_j = a_j + b_j i_I + \varepsilon_j$ dove a_j e b_j sono costanti.
$i_j(\omega) = a_j + b_j i_I(\omega) + \varepsilon_j(\omega)$ accentuando il fatto che sono variabili aleatorie, dove $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ e $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_I) = 0$.
Oltre l'idea di riduzione della complessità c'è quella della riduzione di una variazione di un titolo. Possiamo considerare la variazione degli stati di natura. Cosa sono gli stati di natura? Ad esempio, la San Paolo Imi sta salendo. Uno stato di natura è un certo ottimismo generale, un'altro aspetto dello stesso è il buon bilancio. Noi possiamo ritenere che gli andamenti di un titolo siano correlati all'andamento complessivo del mercato e poi vi siano altre componenti specifiche del titolo.

Abbiamo a disposizione un certo indice I,con un rendimento atteso m_I e la sua varianza σ_I^2. i_I è il v.a. che rappresenta il rendimento di questo indice. $i_j(\omega) = a_j + b_j i_I(\omega) + \varepsilon_j(\omega)$. Il titolo j è legato da questa relazione all'indice I. $\varepsilon_j(\omega)$ serve solo per far tornare i conti.
Si ha questa come accezione di base. Si hanno delle ipotesi sulla v.a. $\varepsilon_j(\omega)$: $\mathtt{E}(\varepsilon_j(\omega))$ e $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ e $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_I) = 0$.
Se prendo due titoli del settore assicurativo è probabile che siano correlati tra loro. Per questo motivo la seconda ipotesi è la più debole perchè spesso non trova riscontro nella realtà.

Dato $i_j(\omega) = a_j + b_j i_I(\omega) + \varepsilon_j(\omega)$ mi interessa fare solo l'analisi di regressione degli indici. Ho bisogno di $2n$ costanti.

$$b_j = \frac{cov(i_j, i_I)}{var(i_I)}$$

$$a_j = m(i_j) - b_j m(i_I)$$

$$m_j = a_j + b_j m_I$$

$$\sigma_j^2 = var(ij) = var(a_j + b_j i_I + \varepsilon_j) =$$

$$= var(a_j) + var(b_j i_I) + var(\varepsilon_j) + cov(a_j, b_j i_I) + cov(a_j, \varepsilon_j) + cov(b_j i_I, \varepsilon_j) =$$

$$= b_j^2 \sigma_I^2 + var(\varepsilon_j)$$

$$cov(i_h, i_k) = b_h b_k \sigma_I^2$$

xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx

Suppongo di poter vendere allo scoperto sia i titoli rischiosi che quello non rischioso

$A_0 = (0, m_0)$ e $M = (\sigma_M, m_M)$

$$m = m_0 + \frac{m_M - m_0}{\sigma_M}\sigma$$

è la market line o il portafoglio efficiente. Se voglio ottenere un rendimento maggiore di quello privo di rischio devo assumermi una data quantità di rischio. Prendiamo un portafoglio qualunque. Per le assunzioni fatte nel CAPM si ottiene:

$$m_P = m_0 + \frac{cov(P, M)}{var(M)}(m_M - m_0)$$

Posso riscrivere la relazione:

$$m_P = m_0 + \frac{cov(P, M)}{\sigma_M} \cdot \frac{m_M - m_0}{\sigma_M}$$

$$\frac{cov(P, M)}{\sigma_M} = \frac{\rho_{PM}\sigma_P\sigma_M}{\sigma_M}$$

$$\rho_{PM} = 1$$

è la scelta ottimale, quindi:

$$m_P = m_0 + \frac{m_M - m_0}{\sigma_M}(\rho_{PM}\sigma_P)$$

è il generico portafoglio. Questo è il rendimento che si ricava da un generico portafoglio (incluso il caso di un portafoglio con il singolo titolo). L'idea è che posso investire con un generico poortafoglio, ma a parità di rendimenti pago la scelta non ottimale di un portafoglio. Se prendo un portafoglio il suo rendimento deve essere pari a:

$$m_P = m_0 + \frac{cov(P, M)}{\sigma_M} \cdot \frac{m_M - m_0}{\sigma_M}$$

$$\frac{cov(P, M)}{\sigma_M} = \rho_{PM}\sigma_P$$

Indichiamo con β_j la quantità

$$\frac{cov(A_j, M)}{\sigma_M^2}$$

per un singolo titolo. Otteniamo:

$$m_j = m_0 + \beta_j(m_M - m_0)$$

da cui

$$m_M = m_0 + (m_M - m_0)$$

I β sono i numeri interessanti che riguardano ciascun titolo. Se conosciamo il β di un titolo sappiamo cosa poterci aspettare in termini di rendimento di tale titolo.

La contropartita è che a rendimento maggiore corrisponde rischio maggiore.

xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx	Supponiamo che le STM abbiano
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx	un rendimento maggiore
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx	dell'andamento complessivo
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx	del mercato.
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx	

Se vogliamo un portafoglio con lo stesso rendimento ma rischio minore conviene considerare la proiezione orizzontale di STM sulla semiretta (vendo però allo scoperto). in alcuni casi c'è poca differenza tra considerare la frontiera della curva o la semiretta, ma se il titolo è soggetto a forti oscillazioni è sicuramente conveniente considerare la semiretta e vendere allo scoperto. Si ha sempre lo stesso rendimento atteso.

xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx	Se acquisto un titolo A_j sono esposto
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx	al rischio $\sigma_j = (\sigma_j - \sigma_{P(j)}) + \sigma_{P(j)}$
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx	dove $\sigma_j - \sigma_{P(j)}$ è il rischio eliminabile
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx	mentre $\sigma_{P(j)}$ è il rischio ineliminabile
xxxxxxxxxx grafico xxxxxxxxxxx	o sistematico.

Sia M un portafoglio di mercato composto da una serie di titoli, quindi scrivibile come una somma pesata di titoli: $\sum x_j A_j$. Posso fare la somma pesata dei rischi:

$$\sum x_j \beta_j \sigma_M = \sum x_j \frac{cov(A_j, M)}{\sigma_M^2} \sigma_M = \frac{cov(\sum x_j A_j, M)}{\sigma_M^2} \sigma_M = \sigma_M$$

Abbiamo che il rischio di un portafoglio di mercato è la media pesata dei vari rischi.

5.11 Futures e Options

I prezzi spot sono quelli al momento. In un contratto futures chi vende si dice che ha una posizione corta e chi compra lunga. Contratti simili sono quelli forward. I futures hanno alcune condizioni fissate e spesso anche le date. I forward non hanno un'assetto di mercato standardizzato. Una call option dà a colui che ne è il portatore il diritto di comprare una certa attività a una certa data e a un certo prezzo. Nelle option europee si ha diritto di comprare a una certa data in quelle americane entro tale data. la data fissata è detta data di esercizio o scadenza. Il prezzo del contratto è detto prezzo d'esercizio. Colui che vende opzioni è colui che in gergo "scrive" opzioni. Il costo del contratto futures è zero. I futures hanno dei costi legati al prezzo di garanzia. per quanto riguarda le opzioni, queste hanno un prezzo positivo. L'origine dei futures è di tipo parassicurativo, venivano usate per operazioni di hedging (per coprirsi dei costi). I futures sono anche comprati dagli speculatori e arbitraggisti. In questo contesto il termine speculatore si riferisce alla presenza sul mercato di persone che hanno aspettative diverse su quello che è l'andamento futuro. Per avere successo bisogna avere aspettative diverse da quelle comuni sul mercato. Ovviamente andare controcorrente ha i suoi rischi. Per esempio, in una lotteria, un biglietto costi 1000 lire e il premio sia di 1 milione, con probabilità di vittoria di 1 su 10000. Supponiamo che l'estrazione avvenga tra un minuto: si possono comprare i biglietti dopo l'estrazione a 100000 lire l'uno (esempio di option). L'opzione alla data, cioè al momento di esercizio vale 0 oppure 1000000. Quanto sarei disposto a pagare quest'opzione? 1 opzione corta e A biglietti lunga. Il portafoglio è fatto di A biglietti e 1 opzione. quanto potrebbe valere questo portafoglio? Stimo il v.a. dell'opzione: 10^{-4} ho un guadagno atteso di 900000, quindi:
$10^{-4}900000+(1-10^{-4})0 = 90$, quindi il premio non è equo. Dopo l'estrazione gli stati di natura sono due: il biglietto è stato estratto $(A \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^5)$ oppure no (0). Voglio fare un hedging perfetto ovvero comporre un portafoglio in cui non corro alcun rischio. l'unica variabile sulla quale posso lavorare è A. Con $A = 9/10$ ho costruito un portafoglio che non mi fa correre alcun rischio. Il valore del portafoglio oggi è zero. Non so ancora quanto valgono le opzioni:
$A \cdot 1000 - 1 \cdot f = 0$ da cui $f = 900$. 900 è il prezzo dell'opzione prima che venga fatta l'estrazione.

metodo binomiale

Per calcolare il v.a. ho bisogno di conoscere p. Nel secondo conto non compare affatto l'informazione della p. Com'è possibile che un'informazione così importante sparisca?

Il primo approccio è molto e solo probabilistico. trascura il fatto che esistono persone disposte a comprare il biglietto. Si tralascia l'aspetto dell'utilità attesa. Dovrei allora considerare la funzione di utilità del decisore. Il punto interessante è il costo del biglietto che dovrebbe essere un punto di equilibrio. Se lo metto più basso, più persone saranno disposte a comprare il biglietto, ma i miei introiti saranno più bassi. 1000 non è scelto a caso. Si può immaginare che esista un mercato secondario dei bigliettiin cui il prezzo è 1000. se è così allora la seconda procedura diventa giustificata. Il numero 1000 incorpora due cose:
le funzioni di utilità di chi è sul mercato,
le stime delle probabilità che si verifichi uno stato di natura.

Se ci fosse un po' d'incertezza sul numero dei biglietti in giro, incorporare il secondo fatto diventa molto importante. Questo è quanto avviene per il mercato. Se 1000 è il prezzo di equilibrio allora il secondo approccio è assai ragionevole. il prezzo dell'opzione non può scostarsi molto dall'equilibrio. In quetso approccio la p è irrilevante, non compare (valutazione delle opzioni con il metodo binomiale).

Nel discorso fatto che ci ha portato a 90 lire c'è un piccolo baco. I discorsi sono fatti in termini di guadagno atteso e non di utilità attesa. Se il criterio fosse quello del guadagno atteso non si comprerebbe il biglietto. se ci sono persone disponibili a comprare il biglietto a 1000, dovrebbero essere disponibili a prendere le opzioni a 900. Per trovare 900 lire non è stata utilizzata la probabilità che il biglietto venga estratto o meno. L'idea del modello binomiale è basata su questa osservazione. si fanno conti sul futuro senza alcuna valutazione di probabilità, perchè la si pensa già incorporata nel prezzo di partenza.

1 opzione (venduta allo scoperto)
A azioni sottostanti
$S \cdot u$ up
$S \cdot d$ down
Si trova un A tale che $S \cdot u \cdot A - f_u = S \cdot d \cdot A \cdot f_d$