

# 1 Preliminari di teoria finanziaria

*Consumatore*

*Atti di consumo*: riguardano oggetti concreti.

*Beni*: fanno riferimento a un mercato in cui le cose vengono scambiate.

*Preferenze*: abbiamo a disposizione beni diversi, il consumatore su questi ha delle preferenze per quanto riguarda l'atto di consumo.

*Panieri di beni*:  $(x_1, \dots, x_l)$  è una  $l$ -upla che indica  $l$  beni diversi dove  $x_1$  rappresenta il numero del "bene 1" disponibile (l'idea più generale è che avrò fissato un'unità di misura).  $x_i \in \mathbb{R}$  e misura quanto ho del bene  $i$ -esimo nel particolare paniere che ho scelto. Si può supporre  $x_i \geq 0$ . I panieri di beni interessano solo per gli atti di consumo. Le preferenze del consumatore sono su diversi panieri di beni.

## Esempio 1

1 mele

$(1, 0)$   $(0, 1)$  possono essere due diversi panieri.

2 pere

Il consumatore è totalmente sovrano per quanto riguarda i suoi gusti. Uso il segno " $\succ$ " se il consumatore preferisce il primo paniere al secondo. Le quantità fisiche di beni non determinano le preferenze del consumatore.

I panieri sono vettori e il " $>$ " è comunemente usato tra numeri reali quindi si usa il simbolo " $\succ$ ". Posso usare il simbolo " $\succeq$ " che indica la preferenza debole e " $\sim$ " che indica l'indifferenza

$(1, 0) \succ (0, 1)$  preferenza stretta

$(1, 0) \succeq (0, 1)$  preferenza debole

$(1, 0) \sim (0, 1)$  indifferenza

## 2 Proprietà formali di $\succeq$ su $\mathbb{R}^2$

$$\left. \begin{array}{l} \text{riflessiva} \\ \text{transitiva} \\ \text{totale} \end{array} \right\} \text{preordine} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{riflessiva} \\ \text{transitiva} \\ \text{totale} \end{array}} \right\} \text{preordine totale}$$

N.B. Non è una relazione d'ordine perchè manca la proprietà antisimmetrica.

Assumo che il mio consumatore sia in grado di confrontare qualsiasi coppia di panieri di beni. Ciò che interessa del consumatore è la personalità.

$\succeq$  è una relazione d'ordine su  $\mathbb{R}^l$ .

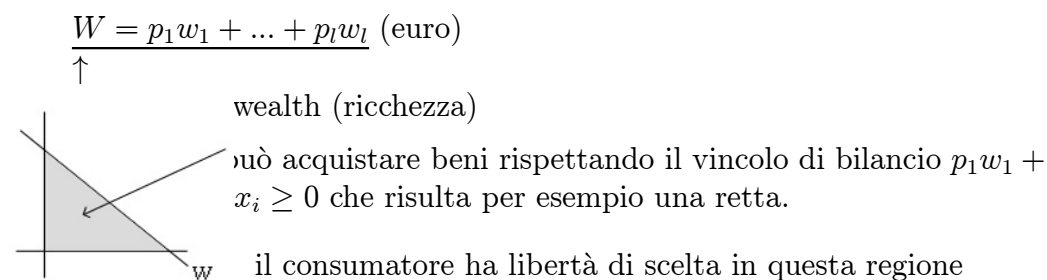
$\mathbb{R}_{\succeq}^l$  indica che i vettori di  $\mathbb{R}^l$  hanno tutti coordinate  $\geq 0$ .

*Dotazione del consumatore:*  $(w_1, \dots, w_l)$

*Mercato:* Istituzione con regole più o meno ben codificate (alcune sotto aspetti di norme).

Assumo che ci siano dei *prezzi*  $(p_1, \dots, p_l) \in \mathbb{R}^l$ ;  $p_i$  rappresenta il prezzo del bene  $i$ -esimo espresso in unità monetaria (es: euro) espresso in quantità unitaria del bene (es: prosciutto 16,00 euro al Kg). Il sistema di prezzi è dato immutabile per il consumatore.

È come se il consumatore avesse a disposizione



All'interno del vincolo di bilancio il consumatore andrà a scegliere il paniere di beni che preferisce.

Ovvero cercherà le  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_l) \succeq (x_1, \dots, x_l)$

$\forall (x_1, \dots, x_l) \in B(w, p)$  dove  $B(w, p)$  indica il vincolo di bilancio.

### 3 Funzioni di utilità

$u : \mathbb{R}_{\geq}^l \rightarrow \mathbb{R}$  è funzione di utilità che rappresenta le preferenze del consumatore se vale  $u(x_1, \dots, x_l) \geq u(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_l) \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_l) \succeq (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_l)$  dove la prima è una disequazione ordinaria perchè  $u$  è a valori in  $\mathbb{R}$ . Il problema del consumatore diventa trovare  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_l)$  in modo che valga  $u(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_l) \geq u(x_1, \dots, x_l)$ . Questo è un problema di massimizzazione vincolata (si usano i metodi di KKT o Lagrange).

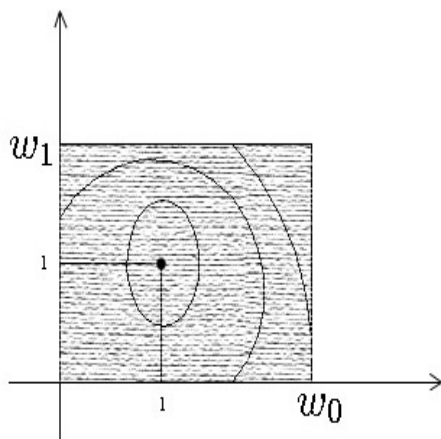
Sia  $(x_1, \dots, x_l)$  una lista di beni,  $x_1$  mele  $x_2$  pere ...

Ci sono vari tipi di mele: golden, stark... per ogni tipo si vuole conoscere il calibro, la qualità, da dove vengono, ... ciò che interessa è quando si ha a disposizione qualcosa. Considero un solo bene a due istanti temporali diversi  $(x_0, x_1)$  di diversa dotazione  $(w_0, w_1)$ .

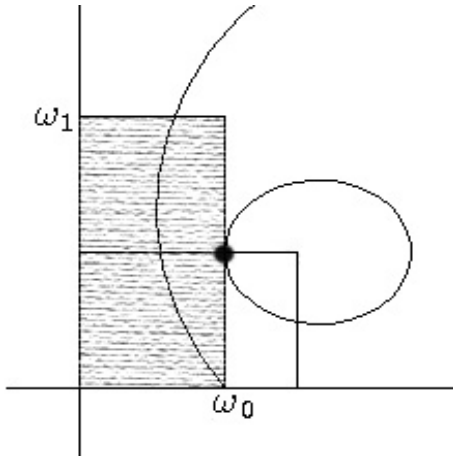
$x_0$  le mele oggi in quantità  $w_0$  Kg di mele oggi

$x_1$  le mele domani in quantità  $w_1$  Kg di mele domani (noti con certezza)

Potremmo immaginare  $(\omega_0, \omega_1)$  due date diverse in cui il bene si rende disponibile per il consumo. Supponiamo per ora che non esista il mercato.

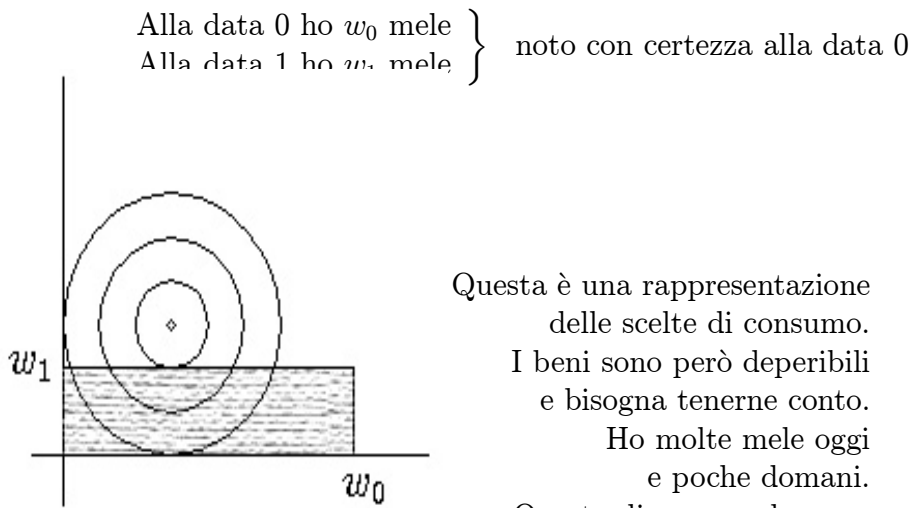


Non ci sono i vincoli di bilancio, ma esiste comunque una zona dove può scegliere i panieri di beni. free disposal (=libera disponibilità) indica la possibilità di disfarsi di qualcosa. Può darsi che la scelta ottimale sia  $(1, 1)$  ovvero la possibilità di consumare una mela oggi e una domani. Le altre restano. Posso considerare le curve di livello e  $(1, 1)$  rappresenta l'ottimo (PUNTO DI SAZIETA').



In questa situazione, con questa regione, il punto ottimale è dato dal punto di tangenza e indica un consumo minore di quello che vorrebbe.

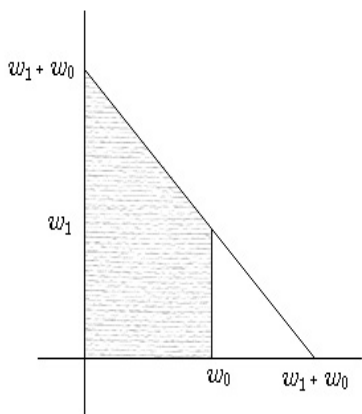
Le preferenze del consumatore non sono del tutto casuali



Questa è una rappresentazione delle scelte di consumo. I beni sono però deperibili e bisogna tenerne conto. Ho molte mele oggi e poche domani. Questo disegno va bene se il bene è deperibile

Nel caso di *bene deperibile* le scelte di consumo sono date da:

$$\begin{cases} x_0 \leq w_0 \text{ dotazione iniziale} \\ x_1 \leq w_1 \leftarrow \text{rappresenta l'insieme sul quale fare le scelte} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_0 \leq w_0 \text{ dotazione iniziale} \\ x_1 \leq w_1 + (w_0 - x_0) \end{cases}$$

↑  
 $w_1 +$  quello che non ho consumato al tempo  $w_0$

-----  
 xxxxxx grafic4 xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx  
 xxxxxx grafic4 xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Si può differire il consumo!

Se si può differire il consumo c'è spazio anche per altri scambi. Potrebbe avvenire uno scambio tra l'individuo al tempo 0 e l'individuo al tempo 1 considerando lo stesso consumatore come due diversi.

Ci sono due beni non deperibili e un sistema di prezzi  $p_0$  e  $p_1$ . Potremmo anche assumere che l'unità monetaria sia il prezzo  $p_0 = 1$  del bene al tempo 0, oppure normalizzare tutto. Questo è plausibile perchè il bene non è deperibile. Pongo  $p_1 = \nu$ .

Dire  $p_0 = 1$  significa che avere una mela o un'unità monetaria è la stessa cosa. Dire  $p_1 = \nu$  significa che posso convertire una mela al tempo  $t_1$  in unità monetaria.

$p_0$  è il prezzo alla data 0 per avere il bene.

$p_1$  è il prezzo alla data 0 per avere una quantità di bene alla data 1.

Si può dire che  $w_0$  è equivalente ad avere  $w_1/\nu$  (posso subito convertire tutto in mele). 1 bene, 2 date: 0 e 1

$(\bar{x}_0, \bar{x}_1)$  t.c.  $(\bar{x}_0, \bar{x}_1) \succeq (x_0, x_1) \forall (x_0, x_1) \in "B"(w)$  Poniamo 1 il prezzo del bene alla data 0 e  $\nu$  il prezzo del bene alla data 1.

N.B. per prezzo si intende il prezzo pagato alla data 0 oppure 1 e per bene alla data 1 si intende il bene disponibile.

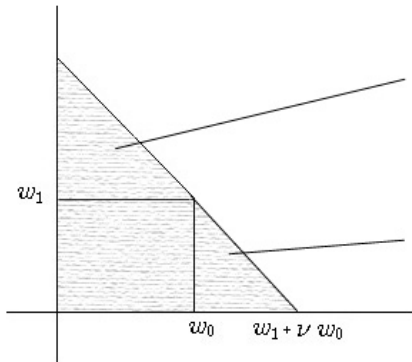
$$\begin{cases} p_0 = 0 \\ p_1 = \nu \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Questi scambi vengono effettuati tutti alla data 0} \\ \text{perchè ho come ipotesi la conoscenza esatta dei} \\ \text{costi e della disponibilità alla data 0} \end{array}$$

$W = p_1 w_1 + \dots + p_l w_l$  vincolo di bilancio

$p_1x_1 + \dots + p_lx_l \leq p_1w_1 + \dots + p_lw_l = W$  vincolo di bilancio

In questo caso si ottiene  $p_1x_1 + \dots + p_lx_l \leq p_1w_1 + \dots + p_lw_l$ .

La situazione di un mercato è di miglioramento, di am-



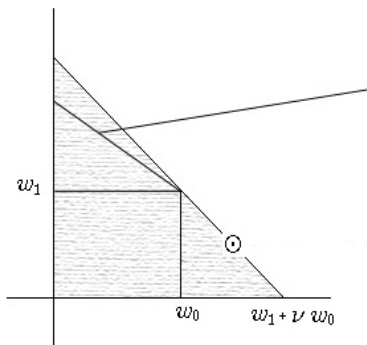
xxxxxxxxxxxxx grafic5 xxxxxxxxxxxxxxxx

xxxxxxxxx grafic5 xxxxxxxxxxxxxxxx

{ In questa zona la situazione  
migliora se  $\nu < 1$   
altrimenti peggiora!

{ In questa zona la situazione  
migliora sicuramente

$(w_0, w_1)$  appartiene al vincolo di bilancio. La posizione del consumatore



xxxxxxxxxxxxx grafic6 xxxxxxxxxxxxxxxx

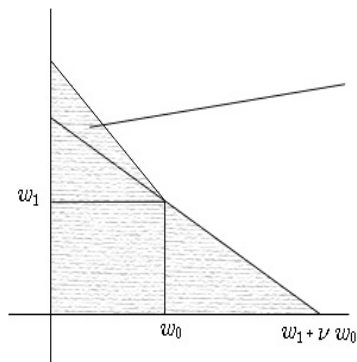
xxxxxxxxxxxxx grafic6 xxxxxxxxxxxxxxxx

{ Se questa pendenza è maggiore di  $\odot$   
allora ho effettivamente  
un ampliamento delle possibilità  
maggiore in valore assoluto

$$x_0 + x_1\nu \leq w \Rightarrow \nu x_1 \leq w - x_0 \Rightarrow x_1 \leq w/\nu - x_0/\nu$$

$$|-1/\nu| = 1/\nu \Rightarrow 1/\nu > 1 \Rightarrow \nu < 1$$

Se  $\nu \leq 1$  ho una situazione migliore.



{ In questo caso  
 non ho un miglioramento  
 totale: alla data 0  
 sto meglio, a quella 1  
 sto peggio

xxxxxxxx grafic7 xxxxxxxx  
 xxxxxxxx grafic7 xxxxxxxx

N.B.Il vincolo di bilancio non fa discriminazione tra passato e futuro.

E' molto insensato pensare che possa accadere  $\nu > 1$

Il consumatore non è obbligato a vendere. La presenza di un mercato non obbliga a usarlo. Può consumare la mela del tempo 1 già al tempo 0. Se  $\nu > 1$  non avrebbe questa possibilità. Può accadere  $\nu > 1$  ma non è una situazione normale.

N.B.ho continuato a considerare  $p_0$  e  $p_1$  i prezzi pagati al tempo 0; se li considerassi al tempo 1 si invertirebbe la situazione.

E' chiaro che alla data 0 avverranno degli scambi di bene contro denaro.

Ciò che si assume abitualmente per quanto concerne i mercati è che

*gli scambi avvengono liberamente.* Lo scambio avviene quando chi fa lo scambio preferisce la situazione ex post a quella ex ante. Lo scambio avviene se si ha un vantaggio da entrambe le parti. Non ci si può però limitare al baratto, quindi si introduce la moneta come intermediario degli scambi. Per moneta si può intendere l'euro come il sale, il grano (che sono anche beni effettivi), o l'oro. *La moneta è fatta per essere usata nello scambio, non per l'accrescersi con l'interesse; essa è per sua natura sterile, mediante l'usura prolifica e questo è di gran lunga il modo più innaturale di guadagnare*(Aristotele).

Questa affermazione supporta e incita una certa prevenzione da parte delle religioni cattolica, ebraica e musulmana verso i prestiti con qualunque tasso d'interesse. L'affermazione ci fa capire inoltre come già in epoca aristotelica ci fosse un mercato piuttosto avanzato.

I prestiti avvengono se:

*Necessito danaro ( $C$ ) al tempo  $t_0 \rightarrow$  restituisco  $N$  al tempo  $t_1$*

*( $C$ ) me lo dà chi necessità  $C$  al tempo  $t_1$*

Ci sono molte complicazioni per la presenza del tempo. Gli scambi avvengono tra due soggetti che però non vivono nel vuoto. io posso cercare chi mi dia  $C$  chiedendo in giro un  $M$  minore, ovvero cerco una situazione di equilibrio sul mercato. Da una parte c'è qualcuno che necessita la somma  $C$ , dall'altra ci devono essere persone in grado di prestare  $C$  e poi mi aspetto che le preferenze tra  $C$  e  $M$  siano tali che  $M > C$ . *Preferenze medie  $M > C$*

Posso avere bisogno di denaro perchè ho una necessità di consumo.  $C$  mi serve per consumo (di un servizio, di un bene).  $C$  mi potrebbe invece servire per aprire un'attività (a esempio).

$C$  [capitale monetario]  $\rightarrow \bar{C}$  [capitale reale]  $\rightarrow$  flusso monetario continuo.

$C$  mi serve per un'INVESTIMENTO.

Si è disponibili a restituire  $M > C$  perchè  $C$  mi offre una serie di possibilità che prima non avevo. Il consumatore mediamente preferisce un consumo alla data attuale piuttosto che alla data futura.

*Se presto  $C$  non posso usarlo finchè non mi sarà ridato.*

*Questo giustifica  $M > C$ . Non è compito dell'economia obbiettare i gusti del consumatore, però è lecito studiarne i motivi.*

*L'altro aspetto che giustifica  $M > C$  è l'incertezza. In base all'affidabilità di chi chiede  $C$  e a seconda di come lo investe varia la richiesta di  $M$ . Altro fattore da considerare è l'inflazione. Chiedere  $M > C$  serve anche per conservare il potere d'acquisto di  $C$ . In questo caso non consideriamo l'inflazione.*

## **Esempio 2**

*Il grano è bene di consumo, capitale monetario, capitale reale (se lo semino mi dà altro grano). Il mercato monetario si sviluppa solo se c'è un adeguato sovrappiù. Le radici della condanna morale agli interessi nascono dal fatto che storicamente si chiedevano prestiti per necessità primarie.*

Il punto di partenza della matematica finanziaria è che avvenga uno scambio



tra  $(C, t_0)$  e  $(M, t_1)$  supposto  $C, M > 0, M > C, t_1 > t_0$ .

$$M = C + I$$

$$I = M - C \text{ interesse}$$

$C$  capitale

$M$  montante

$i = I/C$  tasso d'interesse o tasso di rendimento (interesse e rendimento fanno riferimento a semantiche differenti)

$r = M/C$  fattore di capitalizzazione

$I = iC$  per definizione di  $i$  ma non c'è dietro a questo nessuna legge di carattere finanziario. Sto facendo riferimento a un solo scambio.

Focalizzando invece l'interesse al tempo  $t_1$ :

$(K, t_1)$  associo  $(P, t_0)$

$K$  capitale

$P$  valore attuale o scontato di  $K$  al tempo  $t_0$

$$D = K - P \text{ sconto}$$

$d = D/K$  tasso di sconto

$\nu = P/K$  fattore di anticipazione (o di attualizzazione o di sconto)

	$i$	$r$	$d$	$\nu$
$i$	$i$	$r - 1$	$d(1 - d)$	$(1 - \nu)/\nu$
$r$	$1 + i$			$1/\nu$
$d$				
$\nu$				

$i$  e  $r$  sono le più significative  
 $i$  e  $d$  le più usate

- $i \quad \vec{X}/\vec{t} = (C, -M)/(t_0, t_1) \quad \vec{X} \text{ sono soldi}$
- $ii \quad \vec{X}'/\vec{t}' = (-C, M)/(t_0, t_1) \quad \vec{t}' \text{ date assegnate}$

$i$  è un'esempio di indebitamento o provvista. I soldi che ho al tempo  $t_0$  aumentano di  $C$ , al tempo  $t_1$  diminuiscono di  $-M$ .

$ii$  è un'esempio di investimento.

Le coppie  $(C, t_0)$  e  $(M, t_1)$  vengono considerate equivalenti.

- I  $(C, t_0) \succ_I (M, t_1)$
- II  $(C, t_0) \prec_{II} (M, t_1)$

Nè I nè II considerano equivalenti le situazioni, ma siamo in un mercato e queste preferenze strette degenerano quasi a equivalenza a livello complessivo.

A partire da  $(C, t_0) \sim (M, t_1)$  si ricava una *legge di equivalenza finanziaria*. Abbiamo  $\mathbb{R}^2$  e una relazione su  $\mathbb{R}^2$ . Che  $(C, t_0) \sim (M, t_1)$  implichi  $(\alpha C, t_0) \sim (\alpha M, t_1)$ , cosa che in pratica è dichiaratamente falsa, possiamo pensare sia un'approssimazione ragionevole, cioè sia localmente vera.

Si presuppone che la legge di equivalenza sia ragionevolmente considerata una relazione di equivalenza.

Si può definire una relazione di equivalenza facendo riferimento a una certa funzione. È lecito chiedersi se sotto una legge finanziaria ci sia una qualche funzione.

Definiamo  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Sia  $(C, t_0) \sim (M, t_1) \iff \psi(C, t_0) \sim \psi(M, t_1)$

Linearità di  $f : U \times V \rightarrow W$  nella prima variabile  $f(\alpha u + \beta \bar{u}, v) = \alpha f(u, v) + \beta f(\bar{u}, v)$  dove  $U$  e  $W$  sono spazi vettoriali e  $V$  è un'insieme qualsiasi.

$\psi(C, s)$  è il valore di  $C$  al tempo  $s$ . Possiamo immaginare di essere al tempo 0 e a questo vogliamo ricondurre tutte le somme monetarie che abbiamo al tempo  $s$ .

$$\psi(\alpha C + \beta D, s) = \alpha \psi(C, s) + \beta \psi(D, s)$$

$$\psi(\alpha C, s) = \alpha \psi(C, s)$$

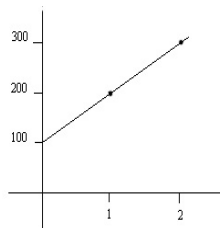
$$C = 1 \quad \alpha = \underline{C}$$

$$\psi(\underline{C}, s) = \underline{C}\psi(1, s)$$

Ciò che voglio è conoscere  $\psi(1, s) \forall s \in \mathbb{R}$  perchè se  $\psi$  è lineare sulla prima variabile, una volta conosciuto questo ho tutta  $\psi$ .

Definisco  $\varphi = \psi(1, s)$  perchè mi basta considerare una funzione del tempo.

Possiamo considerare  $\psi(C, 0) = C$  (la scelta più naturale),  $\psi(1, 0)$  se la  $\psi$  è lineare nella prima coordinata, quindi  $\varphi(0) = 1$  è una scelta di normalizzazione.



Supponiamo di avere a disposizione un capitale di 100 euro e l'interesse semplice del 3% su questo

$$\begin{aligned} \psi(100, 0) &= 100 \\ \psi(100, 1) &= 103 & \text{perciò } \psi(100, s) &= 3s + 100 \\ \psi(100, 2) &= 106 \end{aligned}$$

xxxx grafic8 xxx

$$\psi(1, s) = 0,03s + 1 \quad \leftarrow r \text{ fattore di capitalizzazione}$$

$\psi$  trasforma  $C$  all'istante  $s$  in  $C$  all'istante 0.

Considero il problema opposto: de ho  $C$  all'istante 0, quanto sarà  $C$  all'istante  $s$ ? Supponiamo di avere 100 al tempo 0: quanto avrò al tempo  $s$ ?

$$\psi(100, 1) = 100 = \psi(106, 2)$$

$$\psi(1, 1) = \varphi(1) = \frac{100}{103}$$

$$\psi(1, 2) = \varphi(2) = \frac{100}{106}$$

$$\psi(100, 1) = \frac{100}{103}\psi(103, 1) = \frac{100}{103} \cdot 100$$

$$\varphi(s) = \frac{1}{1+0,03s} \text{ fattore di attualizzazione}$$

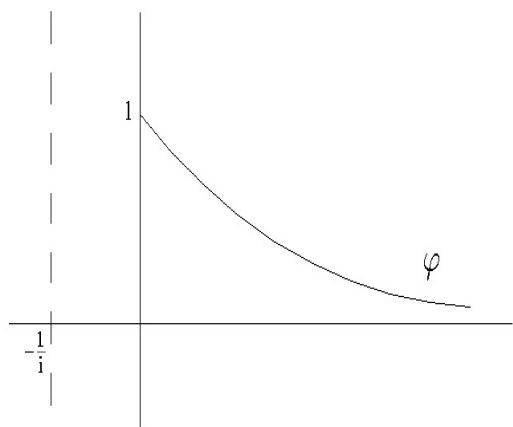
$C$  al tempo 0 avremo  $C(1 + 0,03s)$  al tempo  $s$ .

$C$  al tempo  $s$  equivale a  $C \frac{1}{1+0,03s}$  al tempo 0.

0,03i tasso d'interesse unitario.

$i$  è unitario rispetto al capitale e rispetto al tempo.

$s$  è la misura del tempo con unità di misura uguale a quella di  $i$ .



o 0,05 semestrale.  $s = \text{anni}$ .  
perchè un'anno sono 2 semestri.

dal grafico di  $\varphi$   
Interesse composto  
 $C \cdot (1, s)^s$  al tempo  $s$   
se parto con  $C$  al tempo 0.  
 $\frac{C}{(1+i)^s}$   $C$  al tempo  $s$   
 $\frac{1}{(1+i)^s}$  fattore di attualizzazione

N.B.: La restrizione  $s \geq 0$  non è necessaria anche perchè l'istante 0 lo fissiamo noi arbitrariamente.

$$(C, s) \sim (D, t) \text{ (I)}$$

$$\psi(C, s) \quad \text{(II)} \quad (C, s) \sim (D, t) \stackrel{\text{def}}{\iff} \psi(C, s) = \psi(D, t)$$

$$\psi(C, s) = C\psi(1, s) = C\varphi(s) \quad \varphi(s) \stackrel{\text{def}}{\iff} \psi(1, s) \text{ (III)}$$

↑  
quanto valuto a  $t = 0$  avere una lira al tempo  $s$

$$\psi(1, s) = \psi(C, 0)$$

Esiste un'altro tipo di approccio che si può fare  $C, D, s, t$

Qual'è  $D$  tale che  $(D, t) \sim (C, s)$  dato  $C$  all'istante  $s$  e dato  $t$ ?  $D = \mu(C, s, t)$

Ipotesi di omogeneità  $D = \mu(C, s, t) \Rightarrow \alpha D = \mu(\alpha C, s, t)$

$$\rho(s, t) = \mu(1, s, t) \text{ (IV) } \underline{\text{legge finanziaria}}$$

Ho una unità monetaria al tempo  $s$  quindi al tempo  $t$  ho:

$$\rho(s, t) = \rho(s + T, t + T)$$

**Teorema 1** Sia  $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Supponiamo che  $\forall T \in \mathbb{R}$  sia  $\rho(s+T, t+T) = \rho(s, t)$ . Allora esiste  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\rho(s, t) = r(t-s) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}^2$

**Esercizio 1** Dimostrare il teorema aggiungendo le ipotesi mancanti.

**Esempio 5**

$r(z) = 1 + iz$  interesse semplice,  $r(z) = (1+i)^z$  interesse composto

Cosa vuol dire che una legge finanziaria è scindibile?

Se vale  $\rho(s, t) = \rho(s, u)\rho(u, t)$  (fa riferimento all'interesse composto) dove  $s \leq u \leq t$  si dice che la legge finanziaria è scindibile.

$$r(t-s) = r(u-s)r(t-u)$$

$$0 \leq \sigma \leq \tau \quad \sigma = u-s \quad \tau = t-s \quad \tau - \sigma = t-u$$

$$r(\tau) = r(\sigma)r(\tau - \sigma)$$

$r(\tau - \sigma)$  mi dice qual'è il montante per una lira investita per un tempo  $\tau - \sigma$

$(1+i)^\tau = (1+i)^\sigma(1+i)^{\tau-\sigma}$  l'interesse composto è scindibile.

$(1+i\tau) = (1+i\sigma)(1+i(\tau-\sigma)) = 1 + i\tau + i^2\sigma(\tau-\sigma)$  l'interesse semplice non è semplice.

Suppongo  $\sigma, \tau$  due numeri reali arbitrari, non più vincolati dalla condizione  $0 \leq \sigma \leq \tau$ , allora chiamo  $x = \sigma, y = \tau - \sigma$

$$r(x+y) = r(x)r(y) \tag{1}$$

legge finanziaria omogenea rispetto al capitale, indipendente da traslazioni nel tempo, scindibile (in senso generalizzato).

Con tutte queste ipotesi ottengo  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$r(x+y) = r(x)r(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \underline{\text{Eq.Funzionale}} \quad r(x) = a^x, a > 0$$

Quindi le sole leggi finanziarie che soddisfano 1 sono del tipo  $r(x) = a^x, a > 0$  (sono le uniche funzioni continue misurabili secondo Lebesgue che soddisfano questa condizione).

N.B.:  $r : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  è isomorfismo di gruppi abeliani.

$\mathbb{R}$  è spazio vettoriale su  $\mathbb{Q}$  di dimensione infinita, quindi ha una base infinita (base di Hamel). Si fa questa considerazione perchè con la condizione  $r(x+y) = r(x)r(y)$  non riusciamo a sapere cosa accade nel punto  $\sqrt[2]{2}$  perchè sfruttato solo la addittività. Assumendo a priori la continuità di  $r$ , se so cosa

accade in 1 so cosa accade in  $\sqrt[2]{2}$ . Se così non fosse c'è d'aiuto la considerazione di  $\mathbb{R}$  come spazio vettoriale su  $\mathbb{Q}$ . Mi creò la base infinita di  $\mathbb{R}$  su  $\mathbb{Q}$  dando valori arbitrari nei limiti di  $r(x+y) = r(x)r(y)$ . Se la funzione è continua allora  $r(\sqrt[2]{2})$  riesco a conoscerlo calcolandone il limite. La continuità mi garantisce l'esistenza di una serie che convergerà a  $r(\sqrt[2]{2})$ .

### Esempio 6

$$\begin{aligned}
 (1, 0) &\sim (C, 2) = (1 + 2i, 2) & t = 2 \\
 &C = 1 + 2i & \text{legge dell'interesse semplice} \\
 & & \text{a partire dal tempo } t = 0 \\
 &r(2) = 1 + 2i \\
 (1, 0) &\sim (Ct, 1) & \text{dove } Ct = 1 + i \\
 (Ct, 1) &\sim (Ct r(1), 2) = ((1 + i)^2, 2) & \text{legge dell'interesse semplice} \\
 & & \text{dal tempo } t = 0 \text{ al tempo } t = 1 \\
 & & \text{di una lira che levo e poi rimetto} \\
 & & \text{in banca fino al tempo } t = 2 \\
 (1, 1) &\sim ((r(2) - 1), 2) \\
 \text{ma } (1 + 2i, 2) &\neq ((1 + i)^2, 2) & \text{salvo casi banali.}
 \end{aligned}$$

L'aver fatto un'operazione in mezzo o meno mi dà risultati diversi perchè la legge non è scindibile. Avere una legge scindibile implica che non varia il risultato finale facendo operazioni in mezzo.

*Arbitraggio* → Guadagnare qualcosa con certezza dal niente.

### Esempio 7

*Un tizio investe una lira a  $t = 0$  con interesse semplice per due anni: avrà  $1 + 2i$ . Mi faccio prestare da lui una lira al tempo  $t = 0$ , la ritiro al tempo  $t = 1$ , reinvesto immediatamente il montante e alla fine ottengo  $1 + 2i + i^2$ . Gli dò  $1 + 2i$  ho guadagnato  $i^2$ . Stiamo trascurando le spese inerenti le operazioni finanziarie. Se abbiamo possibilità di arbitraggio su un mercato finanziario vuol dire che non è concorrenziale.*

### Dimostrazione 1

N.B.:  $r, s, t$  sono variabili quantificate e quindi le posso considerare come costanti. L'unica variabile è  $\rho$  (anche se la si potrebbe considerare quantificata, ma non lo facciamo). Se avessimo scritto “ $\exists \rho$ ” allora  $\rho$  sarebbe stata quantificata quindi il teorema non avrebbe avuto variabili, ma solo costanti).

Definisco  $r(x) = \rho(0, x)$  e prendo  $T = -s$   
 $\rho(s, t) = \rho(s - s, t - s) = \rho(0, t - s) = r(t - s)$

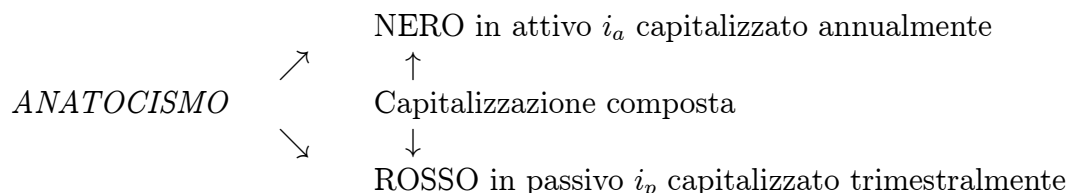
So che  $M = C(1 + i)^n$ , ma talvolta può essere  
 $M = C(1 + i)^t \quad t = 2, 4$  a esempio

a)  $C(1 + i)^2(1 + 0.4i)$  parte con interesse composto, parte con interesse semplice.

b)  $C(1 + i)^{2,4}$

$C(1 + i)^2(1 + 0.4i) \quad f(x) = 1 + ix \quad 0 \leq x \leq 1 \quad i > 0$   
 $C(1 + i)^2(1 + 0.4i)^{0,4} \quad g(x) = (1 + i)^x$

xxxxxxxxx grafic9 xxxxxxxxx  
 quindi  $C(1 + i)^2(1 + 0.4i) > C(1 + i)^{2,4}$   
 a) fa il nostro interesse ed è effettivamente quello che fanno le banche.



Potrebbe essere  $i_a$  3% annuo,  $i_p$  10% annuo capitalizzato trimestralmente.  
 $j(4) = 10\%$  indica un tasso d'interesse annuo, il 4 indica che viene calcolato 4 volte l'anno, quindi viene capitalizzato trimestralmente, (quattro trimestri in un anno).

$C(1 + i)^{0,25}$

$C(1, 1)^{0,25}(1, 1)^{0,25}(1, 1)^{0,25}(1, 1)^{0,25} = C(1, 1)$  non è quello che si intende.  
 Per  $j(4) = 10\%$  s'intende  $C(1 + \frac{0,1}{4})^4$  quel che si riceve ogni trimestre elevato per quattro trimestri.

$C(1 + \frac{0,1}{4})^4 > C(1, 1)$

Quindi un tasso  $i$  annuo capitalizzato trimestralmente risulta maggiore del tasso  $i$  annuo.

*itasso d'interesse annuo*

Tasso d'interesse *equivalente* a  $i$ , relativo a un periodo diverso.

Interesse *nominale* pari a  $i$ , che però viene capitalizzato in periodi più brevi.

interessi trimestrali  $i_{1/4}$

$$(1 + i_{1/4})^4 = 1 + i$$

$m$  numero di periodi di capitalizzazione durante l'anno

$j(2) = 10\%$  5% dopo 6 mesi 5% dopo 6+6 mesi

$j(2)$  equivalente a un tasso annuo che è maggiore di  $j(2)$

$$i = (1 + i_{1/m})^m - 1 = (1 + j(m)/m)^m - 1 \quad \text{tasso annuo equivalente a } j(m)$$

*capitalizzazione continua*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{j(m)}{m}\right)^m - 1 = e^{j(\infty)} - 1$$

$j(\infty) = 10\%$   $j(\infty)$  sta a indicare una capitalizzazione continua.

equivale a un tasso annuo  $i = e^{\infty} - 1$

Interesse annuo equivale a  $j(\infty)$

## 4 Rendite certe

Esistono rendite a rata costante. Vuol dire che viene pagata una rata  $R$  ogni "anno" di durata  $n$  anni.

Come facciamo a valutarlo al tempo  $t$ ?

Legge finanziaria (capitalizzazione composta) rapportare tutto al tempo  $t$ .

**Osservazione 1** La legge finanziaria è omogenea rispetto al capitale perciò non è riduttivo considerare rate unitarie  $R = 1$ .

$a_{n|i}$  =  $a$  figurato  $n$  al tempo  $t$ .

Ovvero valuto una rata unitaria in  $n$  tempi al tasso  $i$ .

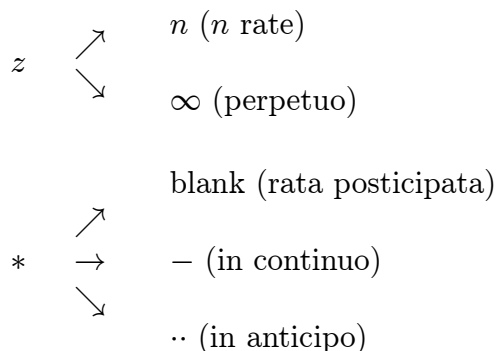
$a_{n|i}$  valore di una rendita attuale unitaria posticipata, composta da  $n$  rate al tasso d'interesse  $i$

$$\nu = \frac{1}{1+i} \quad \nu + \nu^2 + \dots + \nu^n = a_{n|i}$$

$$\nu(1 + \nu + \dots + \nu^{n-1}) = \frac{\nu(1-\nu^n)}{1-\nu}$$

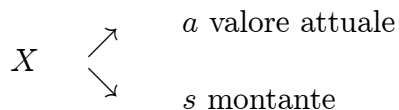


$$\ddot{a}_{n|i} = (1 + \nu + \dots + \nu^{n-1}) = \frac{1-\nu^n}{1-\nu}$$



$t/$  la rata è differita in  $t$  periodi

( $m$ ) frazionata in  $m$  rate (di valore) pari a  $\frac{1}{m}$



$s_{n|i}$  montante

Distinguere tra valore attuale e montante significa che abbiamo implicitamente l'idea di valutare in tempi diversi:

$$s_{n|i} = r^{n-1} + \dots + r + 1 = \frac{1-r^n}{1-r} \quad r = \frac{1}{\nu}$$

### Esempio 8

1) *Caso della rendita perpetua*

$$\ddot{a}_{\infty|i} = \lim_{n \rightarrow \infty} [1 + \dots + \nu^{n-1}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \nu^n}{1 - \nu} = \frac{1}{1 - \nu} \quad \text{se } i > 0$$

2)  $t = 3$  Caso della differita di 3 anni e posticipata

$$a_{n|i} = \begin{cases} \nu^4 + \nu^5 + \dots + \nu^{n+3} \\ \frac{\nu(1-\nu^n)}{1-\nu} \cdot (\nu^3) \end{cases} \leftarrow \text{ulteriore attualizzazione}$$

grazie alla scindibilità della legge finanziaria

## 4.1 Rendite frazionate

$a_{n|i}^{(m)}$  rata frazionata in  $m$  periodi.

$$a_{n|i}^{(m)} = \frac{1}{m} \frac{(1-\nu \frac{1}{m}^{nm}) \nu \frac{1}{m}}{(1-\nu \frac{1}{m})} = \frac{1}{m} \frac{(1-\nu \frac{1}{m}^{nm})}{i \frac{1}{m}} = \frac{(1-\nu \frac{1}{m}^{nm})}{j(m)}$$

Quindi:  $a_{n|i}^{(m)} = \frac{1}{j(m)} (1 - \nu \frac{1}{m}^{nm})$

$$\nu \frac{1}{m}^{nm} = \left( \frac{1}{1+i \frac{1}{m}} \right)^{nm} = \frac{1}{\left[ \left( 1+i \frac{1}{m} \right)^m \right]^n} = \frac{1}{(1+i)^n}$$

Quindi:  $a_{n|i}^{(m)} = \frac{1}{j(m)} \left( 1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right) = \frac{i}{j(m)} \left( \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right) = \frac{i}{j(m)} a_{n|i}$

## 4.2 Rendite in continuo

Ricevo una rata infinitesima in ogni momento e posso ricapitalizzarla.

$$a_{n|i} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{i}{j(m)} a_{n|i} = \frac{i}{\partial} a_{n|i} = \frac{i}{\log(1+i)} a_{n|i}$$

$j(m)$  equivale a un tasso annuo  $(1 + \frac{j(m)}{m})^m - 1$

$$i = e^{j(\infty)} - 1 \quad 1 + i = e^{j(\infty)} \quad j(\infty) = \log(1 + i) = \partial$$

## 4.3 Valutazioni a un tempo $\tau$

Suppongo di avere delle obbligazioni che pagano una cedola ogni anno. Il valore di mercato di un'obbligazione corrisponde a una valutazione al tempo  $\tau$  di una rendita.

$$1 \cdot \nu^{t-\tau} + 1 \cdot \nu^{t+1-\tau} + \dots + 1 \cdot \nu^{t+n-\tau} = \nu [\nu^t + \dots + \nu^{t+n}] = \nu^{t+\tau} [1 + \dots + \nu^n + 1] = \nu^{t-\tau} \ddot{a}_{n+1|i} \quad \text{infine mi riporto al periodo di partenza.}$$

Quindi:  $1 \cdot \nu^{t-\tau} + 1 \cdot \nu^{t+1-\tau} + \dots + 1 \cdot \nu^{t+n-1-\tau} = \nu^{t-\tau} \ddot{a}_{n|i}$

**Osservazione 2**  $a_{n|i} = \frac{1-\nu^n}{i}$  quindi  $1 = ia_{n|i} + \nu^n$   
 Ho una rendita costante con rata uguale a  $i$ .

Se ho una rendita costante  $R$  il suo valore attuale è  $A = R\nu \frac{1-\nu^n}{1-\nu}$

quindi  $n = \frac{\log(\frac{A(1-\nu)}{R\nu} - 1)}{\log \nu}$

$n = \frac{\log \frac{R-iA}{R}}{\log 1+i}$

**Esempio 9** Dati  $A, R, n$  trovare  $\nu$

$A = R(\nu + \dots + \nu^n)$

$p(\nu) = R\nu^n + \dots + R\nu - A$  voglio trovare lo zero di  $p(\nu)$

xxxxxxx grafic xxxxxx  $R, A > 0$  valore attuale

$p \in C^\infty(\mathbb{R})$

$p(0) = -A < 0$

$\lim_{\nu \rightarrow \infty} p(\nu) = +\infty \quad \exists b > 0$  t.c.  $P(b) > 0$

Il teorema degli zeri garantisce che esiste uno zero.

Vediamo cosa succede nel punto 1:  $p(1) = nR - A > 0$  può essere pericolosa questa supposizione. Sono sicura che esiste una radice positiva di questo polinomio che quasi sicuramente sarà  $< 1$

$p'(\nu) = Rn\nu^{n-1} + \dots + R > 0$

$p''(\nu) = Rn(n-1)\nu^{n-2} + \dots + 2R > 0$

La funzione è strettamente convessa per  $\nu > 0$

Questa è l'idea che porta al concetto di tasso interno di rendimento.

N.B.  $R - Ai > 0$  perchè per calcolare il tempo si ha a che fare con i logaritmi.  $A < R/i$  non potrò mai avere un valore attuale  $A \geq R/i$  perchè  $A$  dipende dal numero di rate.

#### 4.4 Ammortamenti di prestiti

anno	quota capitale	quota interesse	annualità (rata)	debito residuo
0				$C$
1	$C_1$	$C \cdot i$	$Q_1 = C_1 + C \cdot i$	$C^{(1)} = C - C_1$
2	$C_2$	$C^{(1)} \cdot i$	$Q_2 = C_2 + C \cdot i$	$C^{(2)} = C - C_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$C_n$	$C^{(n-1)} \cdot i$	$Q_n = C_n + C \cdot i$	$C^{(n)} = C - C_n$

$i$  è il tasso d'interesse composto applicato nell'intera durata.

Condizioni ragionevoli sono  $0 \leq C_1 \leq C$ .

$C_n$  è la quota di capitale che restituisco al mio creditore.

la condizione ragionevole è  $c^{(n)} = 0$  altrimenti non ho estinto (ammortato) il debito.

Possibile piano di ammortamento di particolare interesse.

anno	quota capitale	quota interesse	annualità (rata)	debito residuo
0				$C$
1	0	$C \cdot i$	$Q_1 = C \cdot i$	$C^{(1)} = C$
2	0	$C \cdot i$	$Q_2 = C \cdot i$	$C^{(2)} = C$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$C$	$C \cdot i$	$Q_n = C + C \cdot i$	$C^{(n)} = 0$

N.B. Nulla vieterebbe di rimborsare una quota negativa, ma solitamente non viene considerato.

0				$C$
1	$-C_1$	$C \cdot i$	$Q_1 = 0$	$C^{(1)} = C + C \cdot i$
2	$C + C_1$	$C^{(1)} \cdot i$	$Q_2 = -$	$C^{(2)} = 0$

#### 4.5 Ammortamento con annualità (rate) costanti (ammortamento francese)

anno	quota capitale	quota interesse	annualità	debito residuo
0				$C$
1	$C_1 = R - C \cdot i$	$C \cdot i$	$R$	$C^{(1)} = C - C_1$
2	$C_2 = R - C^{(1)} \cdot i$	$C^{(1)} \cdot i$	$R$	$C^{(2)} = C - C_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$			$R$	0

dove  $C = Ra_{n|i}$      $R = \frac{C}{a_{n|i}}$

## 4.6 Ammortamento 'italiano' (quote capitali restanti)

anno	capitale	interesse	annualità (rata)	debito residuo
0				$C$
1	$C/n$	$C \cdot i$	$Q_1 = C/n + C \cdot i$	$C^{(1)} = C - C/n$
2	$C/n$	$C^{(1)} \cdot i$	$Q_2 = C/n + C^{(1)} \cdot i$	$C^{(2)} = C^{(1)} - C/n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$C/n$	$C/n \cdot i$	$Q_n = \frac{C}{n}(1 - i)$	0

Suppongo di pagare sempre la stessa quota  $C/n$

N.B. Un prestito è visto da un creditore come un'investimento per ottenere una certa rendita a un tasso  $i$ . Se colui che ha fatto il prestito chiede una restituzione anticipata si va a una trattativa fra le parti per stabilire sotto quali condizioni debba avvenire la restituzione. Può darsi che chi deve abbia uno sconto. Capita anche che sia il debitore a chiedere un'estinzione anticipata ma non vi alcuna ragione per cui il creditore debba approvare la proposta, nella misura in cui il debitore può tenere i soldi in tasca, dato che ce li ha già fino alla data concordata.

## 4.7 Interessi pagati anticipatamente (ammortamento tedesco)

$i$  interesse composto applicato.

$$i, r, d, \nu \quad C i \nu = C d$$

0	0	0	0	0
1	$C$	$Ci$	$C + Ci$	0

↕ Ammort.tedesco ↕

entrate	→	0	$Cd$	$Cd$	$C$	} debitore
uscite	→	1	$C$	0	0	

**Esempio 10** Capitale rimborsato alla scadenza

a) Ammortamento normale. Prestito  $C$  con interessi posticipati

anno	capitale	interesse	annualità (rata)	debito residuo
0	0	0	0	$C$
1	0	$C \cdot i$	$C \cdot i$	$C$
2	0	$C \cdot i$	$C \cdot i$	$C$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$C$	$C \cdot i$	$C + C \cdot i$	0

b) Ammortamento tedesco. Prestito  $C$  con interessi anticipati

anno	capitale	interesse	annualità (rata)	debito residuo
0	0	$Cd$	$Cd$	$C$
1	0	$Cd$	$Cd$	$C$
2	0	$Cd$	$Cd$	$C$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$C$	0	$C$	0

c) Prestito  $C$  con interessi anticipati

anno	capitale	interesse	annualità (rata)	debito residuo
0	0	0	0	$C - Cd$
1	0	$(C - Cd)i$	$(C - Cd)i$	$C - Cd$
2	0	$(C - Cd)i$	$(C - Cd)i$	$C - Cd$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$C - Cd$	$(C - Cd)i$	$(C - Cd)(1 + i)$	0

il punto c) è ricavato da un'osservazione finanziaria: alla data 0 viene dato  $C - Cd$

I punti a) b) c) devono avere vettori flussi di cassa equivalenti (ottenuti sottraendo l'ultima con la penultima colonna), il valore attuale deve essere 0. posso avere diversi flussi di cassa.

## 4.8 Ammortamento americano

Le quote capitale vengono depositate verso una terza parte (in un fondo apposito) e capitalizzate a un tasso d'interesse  $j$ . Il montante finale, calcolato al tasso  $j$ , deve essere uguale a  $C$  (la terza parte potrebbe essere una delle due parti).

**Esempio 11** Supponiamo che il rimborso avvenga a rate costanti pari a  $Q$ .

$$QS_{n|j} = C \quad S_{n|j} = \frac{(1+j)^n - 1}{j}$$

0				$C$
1	$Q$	$Ci$	$Q + Ci$	$C$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$Q$	$Ci$	$Q + Ci$	0

Se  $i = j$  ottengo un rimborso a rate costante e la colonna delle rate è identica a quella ottenuta col metodo francese.

L'ammortamento tedesco è la stessa cosa degli altri, bisogna solo tenere conto che viene prestato  $C - Cd$

0	0	0	0	$C - Cd$
$n$	$C - Cd$	$(C - Cd)i$	$(C - Cd)(1 + i)$	0

$$\left| \frac{C - Cd}{(C - Cd)(1 + i)} \right| = \left| \frac{C - Cd}{-C} \right|$$

## 5 Operazioni finanziarie

$$\vec{X}/\vec{t} = (x_1, \dots, x_n)/(t_1, \dots, t_n)$$

Supponiamo di avere  $\vec{X}/\vec{t}$  e  $\vec{Y}/\vec{s}$ : come posso esprimere preferenze?

Si introduce una nozione di equivalenza sull'insieme delle operazioni finanziarie  $\vec{X}/\vec{t} \succeq \vec{Y}/\vec{s}$ . Posso confrontare con l'operazione finanziaria nulla  $\vec{0}/\vec{t}$ .

Introduco  $\phi \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  e  $\succeq$  su  $\phi$ . Anzichè considerare come concetto primitivo una relazione binaria, cioè partire da  $\succeq$  per poi fare delle scelte, si può

partire dall'idea di preferenza come idea primitiva e da essa introdurre una relazione di equivalenza.

Considero  $\phi \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , associo  $Z$  (insieme delle operazioni finanziarie) associo la scelta  $Z \subseteq \phi \rightarrow c(Z) \subseteq Z$  (REVELED PREFERENCES).

Considero  $c$ , la scelta, come concetto primitivo. Si può vedere  $c$  come indotto da una relazione binaria?

Quest'approccio ha rilevante interesse epistemico. Non si chiede nulla al decisore, ma osservando le sue scelte si va a stabilire in maniera oggettiva le sue preferenze.

*REA*=rendimento economico attualizzato.

Si guarda al flusso di cassa prevedibilmente generato in termini di *REA* ed è un criterio per valutare se fare o meno eventuali operazioni finanziarie. *REA* ha vari nomi:

*dcf*:discounted cash flow    *VAN*:valore attuale netto    *NVP*:net present value

$\vec{X}/\vec{t}$  valuto a una data  $\tau$ . Prendiamo  $\tau = 0$ , faccio la somma delle varie entrate e uscite:

$$\sum_{k=1}^n x_k \nu^{t_k} = VAN(\vec{X}/\vec{t}) \quad \text{attualizzando alla data } t^k.$$

Siano  $\vec{t} = (1, 2, \dots, n)$      $\vec{x} = (R, R, \dots, R)$ .

Si ha allora  $VAN(\vec{X}/\vec{t}) = Ra_{n|i}$ .

Se considero un  $\tau$  qualsiasi

$$VAN_{\tau}(\vec{X}/\vec{t}) = \sum_{k=1}^n x_k \nu^{t_k - \tau}$$

Se  $\tau = n$  si ha  $VAN_n(\vec{X}/\vec{t}) = RS_{n|i}$ .

Nulla vieta di considerare un'operazione finanziaria a tempo continuo:

$t_1, \dots, t_n$  sono i tempi con cui è fatta l'operazione,  $x_1, \dots, x_n$  sono i soldi e per convenzione le entrate sono cifre positive e le uscite negative. Le entrate possono essere dei ricavi da dei capitali investiti. (Chiedere un prestito è un'operazione finanziaria). Dire che un'operazione finanziaria è conveniente è come andarla a confrontare con una nulla.

$$\sum_{k=1}^n x_k \nu^{t_k} \quad \text{valutazione fatta a } \tau = 0.$$



$u : \theta \rightarrow \mathbb{R}$      $\theta$  è l'insieme di tutte le operazioni finanziarie.  
 $\theta = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \cup (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \cup \dots \cup (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \cup \dots$

Potrei avere possibilità di scelta diverse. Il punto focale è la scelta del tasso d'interesse.

$$\begin{array}{r} \hline -2000 \qquad 1200 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline -500 \qquad 680 \\ \hline \end{array} \quad \leftarrow \text{ ha il VAN più alto.}$$

Supponiamo che entrambe siano fattibili, ma non duplicabili. Nella seconda avanzano 500 quindi bisogna trovare un impiego alternativo. Se non ho a disposizione i 1000:

supponiamo di avere 600

$$\begin{array}{r} \hline -500 \qquad 600 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline -100 \qquad x > 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{posso fare questa operazione} \\ \text{e mi restano 100 a disposizione.} \end{array}$$

oppure mi faccio prestare 400:

$$\begin{array}{r} \hline -1000 \qquad 1200 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline 400 \qquad z < 0 \\ \hline \end{array}$$

La seconda operazione ha a che fare con la durata:

$$\begin{array}{r} \hline -1000 \qquad 1200 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} \hline x \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{questi esempi servono a mettere} \\ \text{in guardia da un uso troppo} \\ \text{ingenuo del valore attuale.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline -1000 \qquad 0 \qquad 1400 \\ \hline \end{array}$$

In questi esempi stiamo supponendo che il tasso d'interesse sia costante in un periodo di tempo abbastanza lungo, cosa che non è vera.

Supponendo di investire 1000 e di ricavare in due tempi diversi 600 e ancora 600 faccio due diverse attualizzazioni. C'è questo nuovo elemento:

introdurre i vari  $v_i$  che rendono più precise le valutazioni, ma complicano il problema.

*TIR*: Tasso interno di riferimento *IRR*: Intrnal rate of return

Si sfrutta il valore attuale  $VA(\nu) = \sum_{k=1}^n x_k \nu^{t_k}$  che in generale non è un polinomio, ma quando lo è, ovvero se  $t_k = k$  ( $t_k$  equidistanziati) posso andare alla ricerca degli zeri. Se si fa la valutazione nell'istante  $\tau$  (primo movimento di flusso di cassa), viene posto  $\tau = t_1$ . Il primo  $t_k$  abitualmente è 0.  $t_k = k$ ,  $k = 0, \dots, n$  quindi  $n + 1$  periodi ; allora  $\sum_{k=0}^n x_k \nu^{t_k}$  è un polinomio (nel caso  $t_k$  equidistanziati). Gli  $x_k$  possono avere segni qualsiasi. Nel caso della rendita si ha:

$x_0 = -A, x_1, \dots, x_n = R$ ; qui il segno degli  $x_k$  è arbitrario.

$$\begin{array}{ccc} \hline -100 & 200 & \leftarrow \nu = 1/2 \quad i = 100\% = 1 \\ \hline 200 & -200 & \end{array}$$

La prima è una possibilità d'investimento. Se nella parte iniziale ci sono delle somme negative significa che stiamo facendo un'investimento. se chiedo un prestito la situazione si ribalta. Per il VAN bisogna richiedere un tasso d'interesse  $i$ , qui invece non bisogna fare alcuna ipotesi.

*TAEG*: Tasso annuo effettivo globale (per def. vedi Cacciafesta)

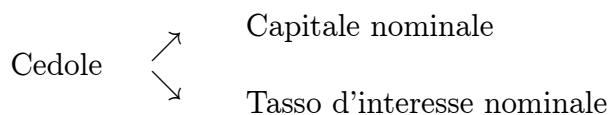
L'obbligo di applicare il TAEG deriva da un decreto e aumenta la trasparenza delle operazioni finanziarie. Un progetto d'investimento può avere TIR non univocamente determinati.

## 5.1 Prestiti obbligazionali (prestiti divisi)

Valutazione di un'obbligazione:

$$VAN_{\tau}(\vec{X}/\vec{t}) = \sum_{k=1}^n x_k \nu^{t_k - \tau} = \sum_{k=1}^n c \cdot i \cdot \nu^{k - \tau} + \hat{C} \nu^{n - \tau}$$

(flusso di denaro attualizzato con  $\nu$ )



## Esempio 12

100C

5 cedole (5 = 100 · 0,05)

0,05i

$\hat{C}$ : capitale rimborsato alla scadenza ( $\hat{C}$  potrebbe anche essere diverso da C)  
 $VAN_r(\vec{X}/\vec{t})$  è il VA dei compensi futuri che riceverete.

Prezzo d'emissione  $C' \geq C$

$C' < C$  emissione sotto la pari

$C' = C$  emissione alla pari

$C' > C$  emissione sopra la pari

Se  $C' = C$  e  $\hat{C} = C$  usando  $\nu = \frac{1}{1+i}$ , ho che  $VA = C$

Se non è vero questo ho il problema effettivo di trovare il TIR

Ho questa operazione finanziaria:

$C'$  alla data 0

$C_1$  alla data 1, ..., n

$\hat{C}$  alla data n

$i$  e  $\nu$  non sono più strettamente legati. Il problema diventa trovare  $\nu$  Per ora ho fatto tutto alla data 0 perchè sto calcolando tutto alla data dell'emmissione, ma le formule possono essere estese al caso generale.

$$\sum_{k=2}^5 c \cdot i \cdot \nu^{k-\tau} + \hat{C} \nu^{5-\tau}$$

Sto comprando la cedola non più sul mercato primario, ma su quello secondario. (Caso primario: acquisto alla data d'emissione).

C capitale nominale

$\hat{C}$  capitale rimborsato alla scadenza

$C'$  prezzo d'emissione

$i_0$  tasso d'interesse nominale

$$\begin{array}{cccc} -C' & Ci_0 & \cdots & Ci_0 + \hat{C} \\ 0 & 1 & \cdots & n \end{array}$$

$$\text{TIR: } C' = \sum_{k=1}^n ci_0 \nu^k + \hat{C} \nu^n \quad \text{prezzo d'emissione}$$

$$P = \sum_{k>\tau} ci_0 \nu^{k-\tau} + \hat{C} \nu^{n-\tau}$$

$\underline{P}$  è il prezzo di un'obbligazione

Esistono il corso "tel quel" e il corso "secco"

Corso "secco" ← escluso il pagamento della cedola che sta per maturare.

Acquisto usa cosa privata del pagamento della cedola, siccome non è giusto che vengano aggiunti i dietimi d'interesse da pagare. Molti piani di ammortamento richiedono un rimborso graduale del capitale.

In circolazione esistono obbligazioni indicizzate:

*BOT*=Buoni ordinari del tesoro (zero coupon)

*BTP*=Buoni del tesoro poliennali

*CCT*=Certificati di credito del tesoro

( $i_0$  è indicizzato tipicamente rispetto ai BOT: ogni volta ricavo il tasso d'interesse annuale dei BOT e vi aggiungo qualcosa) *N.B.* Se si fa un mutuo a tasso variabile questo deve essere ancorato a qualche cosa di indipendente dalle parti.

## 5.2 Duration

Consideriamo una generica operazione finanziaria  $\vec{X}/\vec{t}$  e un  $\tau$  qualsiasi. Suppongo di conoscere  $\nu(\tau, s)$  fattore di attualizzazione.

$$\frac{\tau = 0}{-100} \quad \frac{s = 1}{105} \quad \nu(0, 1)$$

Potrebbe darsi che se investo per più tempo ho un guadagno maggiore (o minore) di quello che aspetto.

$$\frac{\tau = 0}{-100} \quad \frac{s = 2}{113} \quad \nu(0, 2) \quad 113 \text{ è maggiore di } 105 \text{ composto}$$

Non c'è alcun motivo per cui  $i$  del primo periodo debba essere uguale a  $i$  del secondo periodo.

Questo esempio rappresenta la struttura per scadenza dei tassi d'interesse.

**Esempio 13** *Dati gli  $x_i$  alla data  $t_i$ ;  $i = 1, \dots, n$*

*Voglio riportare tutto alla data  $\nu$*

$$x_1 \nu^{t_1 - \tau}$$

$$x_1 \nu^{t_1 - \tau} + \dots + x_n \nu^{t_n - \tau} = \text{valore attuale al tempo } \tau$$

*Duration*: è la durata di un'operazione finanziaria. La duration è una media dei tempi pesata (con gli  $x_i$ ). I pesi vengono tutti attualizzati al tempo  $\tau$

$$D(\tau, \vec{X}, \vec{t}) = \frac{\sum_{k=1}^n (t_k - \tau) x_k \nu(\tau, t_k)}{\sum_{k=1}^n x_k \nu(\tau, t_k)}$$

Per esempio per uno zero coupon bond la duration è il tempo dello zero coupon bond stesso.

### 5.3 Rendita a rate costanti

Posticipata, durata  $n$  che non dipende dalla rata.

$$D(0, \vec{X}, \vec{t}) = \frac{1}{1 - \nu} - \frac{n\nu^n}{1 - \nu^n} = \frac{1 + i}{i} - \frac{n}{(1 + i)^n - 1}$$

Sto considerando un dato  $i$  e la  $\nu$  collegata (una struttura di scadenza piatta) Per  $\nu < 1$  e  $n \rightarrow \infty$  si ha che la duration di una rendita perpetua è  $\frac{1}{1-\nu}$ . se ho un portafoglio di titoli, ognuno di questi titoli ha una propria duration. La duration del portafoglio è la media pesata fra le varie duration e i pesi sono i vari VA. Se serve un titolo che abbia una duration di tot. anni vado a creare un portafoglio in modo che abbia duration di tot. anni (un singolo titolo è un portafoglio particolare)

$$D^{(2)}(\tau, \vec{X}, \vec{t}) = \frac{\sum_{k=1}^n (t_k - \tau)^2 x_k \nu(\tau, t_k)}{\sum_{k=1}^n x_k \nu(\tau, t_k)} \quad \text{Duration del secondo ordine}$$

$$\sqrt{D^{(2)}(\tau, \vec{X}, \vec{t})} \quad \text{Dispersione temporale}$$

$$V(0, \vec{X}, \vec{t}) = \sum_{k=1}^n x_k \nu(0, t_k) = \sum_{k=1}^n x_k \nu^{t_k} = \sum_{k=1}^n x_k (1 + i)^{-t_k}$$

Devo avere a disposizione la struttura a scadenza dei tassi d'interesse

$$\frac{\partial V}{\partial i}(0, \vec{X}, \vec{t}) \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=1}^n x_k (-t_k) (1 + i)^{-t_k - 1}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial i^2}(0, \vec{X}, \vec{t}) \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=1}^n x_k (t_k) (t_k + 1) (1 + i)^{-t_k - 2}$$

$$D(0, \vec{X}, \vec{t}) = \frac{\sum_{k=1}^n t_k x_k (1+i)^{-t_k}}{V(0, \vec{X}, \vec{t})}$$

$$-\frac{D(0, \vec{X}, \vec{t})}{1+i} = \frac{\partial V}{\partial i}(0, \vec{X}, \vec{t})/V(0, \vec{X}, \vec{t}) \quad (**)$$

(\*) è il coefficiente di variazione di VA per piccoli spostamenti.

(\*\*) è la variazione relativa del VA; questa grandezza relativa è detta SEMI-ELASTICITA' o anche derivata logaritmica di  $V$ . Una domanda sul mercato mi dice la quantità della domanda rispetto ai prezzi

$$\frac{\frac{\frac{\partial V}{\partial i}}{V}}{\frac{\partial i}{i}} = i \cdot \frac{\frac{\partial V}{\partial i}}{V} = -\frac{i}{1+i} D(0, \vec{X}, \vec{t})$$

Se considero due zero coupon bond con durata diversa,  $a$  dura un'anno e alla fineavrò 110,  $b$  dura 2 anni e alla fineavrò 121. sto immaginando di essere in una struttura piatta. Suppongo che ci sia una variazione di  $i$  che passa da 0,1 a 0. Qual'è il valore attuale degli zero coupon bond? 110 per  $a$  e 121 per  $b$ .  $b$  è aumentato del doppio perchè la duration è doppia. E questo è ragionevole perchè si rimane con  $b$  per un periodo più lungo esposti alle intemperie del mercato.

“ CONVEXITY ”  $\frac{\frac{\partial^2 V}{\partial i^2}}{V}$

“CONVEXITY RELATIVA”  $\frac{\frac{\partial^2 V}{\partial i^2}}{\frac{\partial V}{\partial i}}$

Vengono applicate in un contesto preciso che prende il nome di ‘immunizzazione’: un tentativo di rendersi immuni dal rischio di variazioni d’interesse.