

1 Implementazione: introduzione alla formalizzazione

Gli elementi essenziali saranno un insieme di *individui*, un insieme di *alternative* dentro al quale mettiamo tutti i possibili oggetti di scelta finale, le *preferenze* degli individui (sarà dato un insieme di preferenze ammissibili; di fatto ci occuperemo del caso speciale in cui questo insieme contiene tutte le preferenze possibili degli individui) e la *classe* dei giochi che possono essere chiamati a giocare. D'ora in poi, ci riferiremo agli individui come ai *giocatori* in quanto, come vedremo, li faremo giocare.

L'idea è che *uno*, padrone, boss, principale, governo, costituente, etc., abbia presente una ben fissata *norma* che sulla base delle preferenze dei giocatori determina una scelta finale (perché è quella giusta, perché è quella che conviene di più al boss, etc . . .). Però questo *uno* non conosce le preferenze dei *giocatori*. Per ottenere il risultato desiderato, allora, deve escogitare un opportuno gioco che, *giocato dai giocatori*, produca il risultato finale desiderato. Si osservi che in quello che faremo sarà questo "uno" sarà *esterno* rispetto all'insieme degli individui di cui ci occupiamo.

Si noti un "trade-off" interessante: questo "uno" ha poca informazione ma ha molto potere, in quanto può decidere che gioco devono giocare i giocatori. Ma il suo potere non giunge fino al punto di poter obbligare gli individui ad effettuare le scelte che lui desidererebbe facessero.

Ci occuperemo della formalizzazione di questi discorsi. Premettendo un rapido cenno al problema della *social choice* così come è stato formulato da Arrow.

Scelte sociali

Abbiamo n individui ($\{1, \dots, n\} = N$). Abbiamo un insieme finito C di possibili oggetti di scelta. Assumeremo che ogni individuo i abbia preferenze su C , espresse da un preordine totale \succeq_i . La n -upla ordinata $(\succeq_1, \dots, \succeq_n)$ verrà detta *profilo di preferenze*. Verrà indicato con \mathcal{P} un'insieme di profili di preferenze. Mentre R indicherà l'insieme di tutti i preordini totali su C ¹.

Una *social choice rule* è una corrispondenza $f : \mathcal{P} \rightrightarrows C$. Cioè f seleziona un *sottoinsieme* non vuoto di C per ogni profilo in \mathcal{P} .

Esempio 1 f sceglie gli elementi preferiti da $1 \in N$ (regola dittatoriale,

¹N.B.: Attenzione: gli elementi di \mathcal{P} sono n -uple di preordini totali, mentre gli elementi di R sono preordini totali

con dittatore l'individuo 1).

Esempio 2 f sceglie gli elementi non dominati nel senso di Pareto.

Esempio 3 A ogni elemento di C assegniamo un punteggio sulla base delle preferenze dei vari individui e poi sommiamo (regola di Borda). f sceglie gli elementi di C che ottengono il punteggio massimo.

C'è un modo per *costruire* una social choice rule *accettabile*? La risposta data da Arrow è negativa, per lo meno se si considerano delle *social choice rule* esprimibili mediante aggregazione di preferenze. Cioè, se a ogni profilo di preferenze in \mathcal{P} vogliamo associare un preordine totale su C .

Diremo *social welfare function* una $\Phi : \mathcal{P} \rightarrow R$. Ovviamente, data una Φ possiamo ottenere facilmente una f , scegliendo l'elemento (o gli elementi) di C che sono preferiti per il preordine totale $\Phi(\succeq_1, \dots, \succeq_n)$ e questo per ogni $(\succeq_1, \dots, \succeq_n) \in \mathcal{P}$.

Cerchiamo allora una Φ che soddisfi condizioni ragionevoli:

(U) [dominio universale]: $\mathcal{P} = R^n$, ovvero vogliamo che Φ sia definita per ogni profilo di preferenze

(P) [principio di Pareto, o condizione di unanimità]:

$$\forall c', c'' \in C, \quad \forall (\succeq_i)_{i \in N} : [c' \succeq_i c'' \quad \forall i \in N] \Rightarrow c' \sqsupseteq c''^2.$$

(IIA) [indipendenza delle alternative irrilevanti]:

$$\forall (\succeq_i)_{i \in N} \quad \text{e} \quad \forall (\succeq'_i)_{i \in N} :$$

$$\forall \hat{c}, \hat{c}' \in C \quad \left([(\hat{c} \succeq_i \hat{c}') \Leftrightarrow (\hat{c} \succeq'_i \hat{c}') \quad \forall i \in N] \Rightarrow [\hat{c} \sqsupseteq \hat{c}' \Leftrightarrow \hat{c} \sqsupseteq' \hat{c}'] \right)$$

L'interpretazione di (IIA) è che, nel voler determinare le preferenze *collettive* tra due alternative \hat{c}, \hat{c}' , io devo guardare solo alle preferenze dei vari individui relativamente a \hat{c} e \hat{c}' . Gli altri elementi non c'entrano. Come già visto, la regola di Borda è un esempio di violazione di (IIA).

²Indico per comodità $\Phi((\succeq_i)_{i \in N}) = \sqsupseteq$, e di conseguenza \sqsupseteq per $\Phi((\succ_i)_{i \in N})$ (\sqsupseteq e (non \sqsupseteq))

Teorema (Arrow, 1951 e 1963). Sia $\Phi : \mathcal{P} \rightarrow R$ che soddisfi U, P, IIA . Allora Φ è dittatoriale.

Implementazione : formalizzazione

Ci porremo il problema di *implementare* una data social choice rule. Per strutturare il problema abbiamo bisogno di fissare ancora due elementi. Uno è il tipo di gioco che pensiamo di fare giocare ai vari individui, o per meglio dire a quale formalizzazione siano interessati: può essere un gioco in forma strategica o in forma estesa, ad informazione completa od incompleta. Noi ci occuperemo solamente di giochi in forma strategica ad informazione completa.

L'altro elemento riguarda il tipo di *razionalità strategica* che presupponiamo, e che verrà incorporato nella scelta di un particolare concetto di soluzione: equilibrio di Nash, strategie dominanti, equilibri correlati, strategie razionalizzabili, evolutionary stable strategies (ESS), equilibri perfetti nei sottogiochi, equilibri perfetti (propri, persistenti), equilibri di qualche sistema di apprendimento, etc ...

Noi ci limiteremo al concetto di equilibrio di Nash (si noti che l'aver scelto la forma strategica di per sé rende inapplicabili concetti tipici della forma estesa, quali gli equilibri perfetti nei sottogiochi, così come gli equilibri sequenziali (cfr. Kreps e Wilson)).

Il problema sarà quindi il seguente: data una choice rule, come implementarla quale equilibrio di Nash per un opportuno gioco in forma strategica? Vanno però ancora precisate alcune cose. Teniamo presente che il decisore centrale non può imporre le preferenze ai giocatori³! Quindi lui potrà scegliere solo la game form. Cioè il gioco fisico da fare giocare, che però poi avrà uno oppure un altro equilibrio di Nash a seconda di quali siano le preferenze dei giocatori.

Quindi sarà opportuno *spezzare* anche formalmente un gioco nelle sue due componenti: game form e preferenze dei giocatori.

Fin qui abbiamo visto una pre - descrizione a chiacchiere di quanto faremo formalmente. C'è però un punto importante che non può essere sottaciuto: c'è una apparente contraddizione in quello che stiamo facendo. Da una parte abbiamo il decisore centrale che non conosce le preferenze dei giocatori (se no potrebbe imporre per legge⁴ l'oggetto $c \in C$ che lui associa mediante f alle preferenze dei giocatori).

Questo conduce naturalmente ad una modellizzazione ad informazione

³In questo modello che studiamo. Ma con un pò di pubblicità. . .

⁴Se può. Ma, comunque, il problema cambia se il boss sa le preferenze!!

incompleta. Potrebbe quindi esserci una contraddizione: perché considerare l'equilibrio di Nash anziché quello Nash - bayesiano in un contesto di informazione incompleta? Ancora peggio: perché modellizzare l'interazione strategica dei giocatori come gioco ad informazione completa (come è stato già anticipato), se siamo evidentemente in un contesto di informazione incompleta? A questa domanda risponde Maskin. L'argomentazione principale è la seguente: può benissimo succedere che il decisore centrale non conosca le preferenze dei giocatori mentre loro se le conoscono reciprocamente.

Altra situazione in cui la implementazione in Nash può avere senso è quando il decisore centrale è un constitutional designer (deve fare le sue scelte dietro un "velo di ignoranza").

Passiamo finalmente alla formalizzazione. Abbiamo:

- n individui ($\{1, 2, \dots, n\} = N$)
- C insieme finito (degli oggetti di scelta, o conseguenza)
- \mathcal{P} un insieme di profili di preferenze. Indicheremo con \succeq un generico elemento di \mathcal{P} . Attenzione che $\succeq = (\succeq_1, \dots, \succeq_n)$, con \succeq_i preordine totale su C per ogni $i \in N$.
- $f : \mathcal{P} \rightrightarrows C$ una corrispondenza (cioè $f(\succeq)$ è un sottoinsieme non vuoto di C per ogni $\succeq \in \mathcal{P}$). È la choice rule.

Diremo *game form strategica a conseguenze in C^5* una terna $G = (N, (A_i)_{i \in N}, g)$, dove N è quello di prima, gli A_i sono insiemi e $g : A \rightarrow C$ è detta outcome function ($A = \prod_{i \in N} A_i$; C è quello di prima).

È evidente che una game form e un profilo di preferenze ci danno un gioco in forma strategica:

$(N, (A_i)_{i \in N}, \sqsupseteq_i) = (G, \succeq)$, dove $a' = (a'_1, \dots, a'_n) \sqsupseteq_i (a''_1, \dots, a''_n) = a''$ se e solo se $g(a') \succeq_i g(a'')$.

Naturalmente saremo interessati ad un dato insieme \mathcal{G} di game forms.

E abbiamo anche bisogno (in generale) di un *solution concept*, che è una corrispondenza \mathcal{S} che ad ogni gioco (G, \succeq) tale che $G \in \mathcal{G}$ e $\succeq \in \mathcal{P}$, associa un sottoinsieme di A .

Ovviamente per noi \mathcal{G} sarà \mathcal{N} , che ad ogni gioco assegna i profili di strategia che sono equilibrio di Nash.

Possiamo finalmente parlare di implementazione.

Definizione (179.1 di Osborne - Rubinstein) Sia dato un *environment* $\mathcal{E} = (N, C, \mathcal{P}, \mathcal{G})$. E sia \mathcal{S} un solution concept per \mathcal{E} . Sia infine $f : \mathcal{P} \rightrightarrows C$ una choice rule. Diremo che $G = (N, (A_i)_{i \in N}, g) \in \mathcal{G}$ *\mathcal{S} -implementa f* se:

$$\forall \succeq \in \mathcal{P}, \quad g(\mathcal{S}(G, \succeq)) = f(\succeq)$$

Ovviamente diremo che f è \mathcal{S} -implementabile se esiste G che \mathcal{S} -implementa f .

Per una rappresentazione diagrammatica della definizione, vedasi la figura 3.

⁵d'ora in poi detta game form, se non c'è rischio di confusione

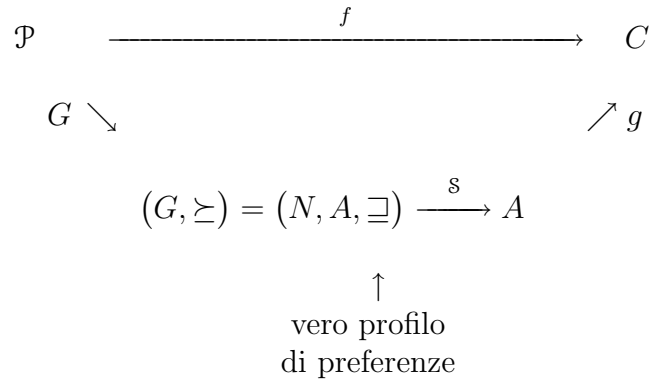


Figura 3. (G \mathcal{S} -implementa f)

Sia $\hat{\succeq} \in \mathcal{P}$

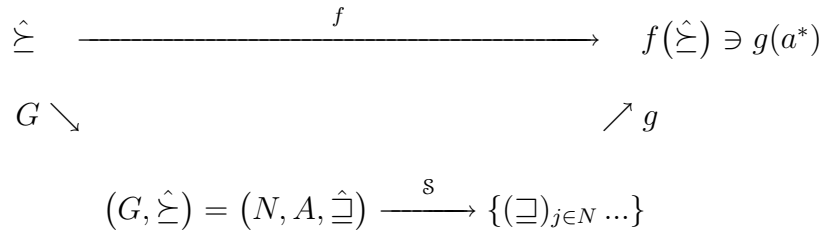


Figura 4. (truthful \mathcal{S} -implementazione f)

“Truthful implementation” e “revelation principle”

Vediamo ora la nozione di truthful \mathcal{S} - implementation.

Definizione (179.2 di O- R). Sia $\mathcal{E} = (N, C, \mathcal{P}, \mathcal{G})$ un environment con la condizione che per ogni $G = (N, (A_i)_{i \in N}, g) \in \mathcal{G}$ si ha che $A_i = \mathcal{P} \quad \forall i \in N$. Sia \mathcal{S} un solution concept ed f una choice rule. Diremo che $G \in \mathcal{G}$ truthfully \mathcal{S} - implementa la choice rule f se $\forall \succeq \in \mathcal{P}$ si ha:

- $a^* \in \mathcal{S}(G, \succeq)$, dove $a^* = (a_i^*)_{i \in N}$ e $a_i^* = \succeq \quad \forall i \in N$
(cioè: a^* ci dice che ogni giocatore riporta il vero profilo di preferenze)
- $g(a^*) \in f(\succeq)$
(cioè: l'esito che si ottiene dal gioco se ogni giocatore riporta il vero profilo di preferenze è uno di quelli buoni, cioè è tra quelli che la choice rule individua).

Questo è uno schema generale, non ristretto al solo equilibrio di Nash. Ma il *revelation principle* lo troveremo per gli equilibri di Nash.

Teorema (Lemma 185.2 di O- R) *Revelation principle*. Sia \mathcal{E} un environment. Se f è \mathcal{N} -implementabile, allora f è anche truthfully \mathcal{N} -implementabile.

Dimostrazione Si tratta di utilizzare l'idea di funzione composta, e poco più.

Sia $G = (N, (A_i)_{i \in N}, g)$ una game form che Nash-implementa $f : \mathcal{P} \rightrightarrows C$.

Per ogni $\succeq = (\succeq_1, \dots, \succeq_n) \in \mathcal{P}$, sia $(a_i(\succeq))_{i \in N}$ un equilibrio di Nash del gioco (G, \succeq) .

Definiamo una nuova game - form $G^* = (N, (A_i)_{i \in N}, g^*)$. Dove $A_i^* = \mathcal{P} \quad \forall i \in N$ (siamo obbligati a fare così per definizione di truthful implementation). E dove $g^*(p) = g((a_i(p_i))_{i \in N})$ per ogni $p \in \prod_{i \in N} A_i^*$.

Si noti che ogni p_i è un profilo di preferenze, e quindi p è un profilo di profili di preferenze! Siamo a livelli quasi demenziali. Ma funziona.

Infatti si ha che, dato $\hat{\succeq} \in \mathcal{P} : p^* = (p_i)_{i \in N}$, con $p_i = \hat{\succeq} \quad \forall i \in N$, è un equilibrio di Nash per $(G^*, \hat{\succeq})$. Inoltre, $g^*(p^*) \in f(\hat{\succeq})$.

Vediamo per esteso la costruzione nel caso di $N = \{I, II\}$, cioè con due giocatori:

Sia $G = (A_I, A_{II}, g)$ una game form che \mathcal{N} -implementa $f : \mathcal{P} \rightrightarrows C$.

Per ogni $\succeq \in \mathcal{P}$, sia $(a_I(\succeq), a_{II}(\succeq))$ equilibrio di Nash per (G, \succeq) .

Definiamo $G^* = (\mathcal{P}, \mathcal{P}, g^*)$, dove:

$$g^*((\succeq'_I, \succeq'_{II}), (\succeq''_I, \succeq''_{II})) = g(a_I(\succeq'_I, \succeq'_{II}), a_{II}(\succeq''_I, \succeq''_{II})).$$

Sia allora $\hat{\succeq} \in \mathcal{P}$. Dobbiamo dimostrare che $(\hat{\succeq}, \hat{\succeq})$ è equilibrio di Nash del gioco costruito a partire dalla game - form G^* e dalle preferenze $\hat{\succeq}$.

Cioè che:

$$g^*\left((\hat{\succeq}_I, \hat{\succeq}_{II}), (\hat{\succeq}_I, \hat{\succeq}_{II})\right) \hat{\succeq}_I \quad g^*\left((\succeq_I, \succeq_{II}), (\hat{\succeq}_I, \hat{\succeq}_{II})\right) \quad \forall (\succeq_I, \succeq_{II} \in \mathcal{P})$$

(e ovviamente l'analoga condizione per II, che non trascrivo). Vale a dire:

$$g\left(a_I(\hat{\succeq}_I, \hat{\succeq}_{II}), a_{II}(\hat{\succeq}_I, \hat{\succeq}_{II})\right) \hat{\succeq}_I \quad g\left(a_I(\succeq_I, \succeq_{II}), a_{II}(\hat{\succeq}_I, \hat{\succeq}_{II})\right)$$

$$\forall(\succeq_I, \succeq_{II}) \in \mathcal{P}$$

Ma noi sappiamo che $(a_I(\hat{\succeq}_I, \hat{\succeq}_{II}), a_{II}(\hat{\succeq}_I, \hat{\succeq}_{II}))$ è equilibrio di Nash per (G, \succeq) .

Quindi:

$$g(a_I(\hat{\succeq}_I, \hat{\succeq}_{II}), a_{II}(\hat{\succeq}_I, \hat{\succeq}_{II})) \succeq_I g(a'_I, a_{II}(\hat{\succeq}_I, \hat{\succeq}_{II})) \\ \forall a'_I \in \mathcal{P}$$

E quindi sarà vero, a maggior ragione per gli a' del tipo $a_I(\succeq_I, \succeq_{II})$.

Funziona!

Ora che abbiamo visto un esempio di *revelation principle* in azione, con tutti i dettagli, è il caso di mettere in evidenza i problemi di questo concetto. Questi sono essenzialmente due, come si vede dalla definizione:

- possono esserci soluzioni NON truth telling (cioè non si chiede che $\{a^*\} = \mathcal{S}(G, \succeq) \quad \forall \succeq \in \mathcal{P}$):
- possono esserci profili di preferenze per i quali non ogni esito preferito secondo f è una soluzione del gioco (cioè non si chiede che $g(\mathcal{S}(G, \succeq)) = f(\succeq)$):

Va detto (e su questo Maskin pone particolarmente l'accento) che non sempre in letteratura è stata prestata la dovuta attenzione a questi difetti.

Condizioni necessarie e condizioni sufficienti di \mathcal{N} -implementabilità

Se uno ha ricavato un po' di interesse per il problema di implementazione, gli suggerisco di leggere anche la parte che O- R dedicano alla implementazione in strategie dominanti. Vale anche la pena di vedere Maskin su un approccio, che usa l'idea di *effectivity function*.

QUANTO SEGUE E' RICOPIATO DA Osborne e Rubinstein

Nash Implementation

[We have shown] that any Nash - implementable choice rule is also truthfully Nash - implementable: there is a game form in which (i) each player has to announce a preference profile and (ii) for any preference profile truth -

telling is a Nash equilibrium. This result serves two purposes. First, it helps to determine the boundaries of the set of Nash - implementable choice rules. Second, it shows that a simple game can be used to achieve the objective of a planner who considers truthful Nash equilibrium to be natural and is not concerned about the outcome so long as it is in the set given by the choice rule⁶.

Lemma 185.2 (Revelation principle for Nash implementation)

Let $(N, C, \mathcal{P}, \mathcal{G})$ be an environment in which \mathcal{G} is the set of strategic game forms. If a choice rule is Nash-implementable then it is truthfully Nash-implementable.

Proof. Let $G = (N, (A_i)_{i \in N}, g)$ be a game form that Nash - implements the choice rule $f : \mathcal{P} \rightrightarrows C$ and for each $\succeq \in \mathcal{P}$ let $(a_i(\succeq))$ be a Nash equilibrium of the game (G, \succeq) . Define a new game form $G^* = (N, (A_i^*), g^*)$ in which $A_i^* = \mathcal{P}$ for each $i \in N$ and $g^*(p) = g((a_i(p_i)))$ for each $p \in \prod_{i \in N} A_i^*$. (Note that each p_i is a preference profile and p is a profile of preference profiles). Clearly the profile p^* in which $p_i^* = \succeq$ for each $i \in N$ is a Nash equilibrium of (G^*, \succeq) and $g^*(p^*) \in f(\succeq)$.

Note that it does not follow from this result that in an analysis of Nash implementation we can restrict attention to games in which each player announces a preference profile, since the game that truthfully Nash - implements the choice rule may have non - truthful Nash equilibria that generate outcomes different from that dictated by the choice rule. Note also that it is essential that the set of actions of each player be the set of preference profile, not the (smaller) set of preference relations, as in part (b) of the revelation principle for DSE - implementation (Lemma 181.4).

We now define a key condition in the analysis of Nash implementation.

DEFINITION 186.1 A choice rule $f : \mathcal{P} \rightrightarrows C$ is **monotonic** if whenever $c \in f(\succeq)$ and $c \notin f(\succeq')$ there is some player $i \in N$ and some outcome $b \in C$ such that $c \succeq_i b$ and $b \succ'_i c$.

That is, in order for an outcome c to be selected by a monotonic choice rule when the preference profile is \succeq but not when it is \succeq' the ranking of c relative to some other alternative must be worse under \succeq' than under \succeq for

⁶Rinvio chi fosse interessato a vedere quanto detto negli appunti sugli equilibri correlati a proposito di due definizioni di equilibrio correlato e sul fatto che la prima risulta essere "sufficiente"

at least one individual.

An example of a monotonic choice rule f is that in which $f(\succeq)$ is the set of weakly Pareto efficient outcomes: $f(\succeq) = \{c \in C : \text{there is no } b \in C \text{ such that } b \succ_i c \ \forall i \in N\}$. Another example is the rule f in which that $f(\succeq)$ consists of every outcome that is a favorite of at least one player: $f(\succ) = \{c \in C : \text{there exists } i \in N \text{ such that } c \succeq_i b \ \forall b \in C\}$.

PROPOSITION 186.2 Let $(N, C, \mathcal{P}, \mathcal{G})$ be an environment in which \mathcal{G} is the set of strategic game forms. If a choice rule is Nash-implementable then it is monotonic.

Proof. Suppose that the choice rule $f : \mathcal{P} \rightrightarrows C$ is Nash-implemented by a game form $G = (N, (A_i), g), c \in f(\succeq)$, and $c \notin f(\succeq')$. Then there is an action profile a for which $g(a) = c$ that is a Nash equilibrium of the game (G, \succeq) but not of (G, \succeq') . That is, there is a player j and action $a'_j \in A_j$ such that $g(a_{-j}, a'_j) \succ'_j g(a)$ and $g(a) \succeq_j g(a_{-j}, a'_j)$. Hence f is monotonic.

2 L'esempio di Re Salomone

QUANTO SEGUE IN INGLESE E' RICOPIATO DA Osborne e Rubinstein
LA PARTE IN ITALIANO SONO MIEI ESEMPI

EXAMPLE 186.3 (*Solomon's predicament*) The biblical story of the Judgment of Solomon illustrates some of the main ideas of implementation theory. Each of two woman, 1 and 2, claims a baby; each of them knows⁷ who is the true mother, but neither can prove her motherhood. Solomon tries to educe the truth by threatening to cut the baby in two, relying on the fact that the

⁷Si noti l'importanza di questa osservazione: è ragionevole assumere che per i due individui coinvolti (le due donne) le loro preferenze siano conoscenza comune. Quindi è appropriato pensare di modellizzare la situazione come gioco ad informazione *completa*. Naturalmente, d'altro lato, Re Salomone non conosce le preferenze (sennò dedurrebbe immediatamente chi è la vera madre). Meno rilevante per quello che stiamo facendo è l'aspetto di non *verificabilità* "davanti al giudice" di chi sia la vera madre: ma certo, se esistesse questo sistema (dall'analisi del DNA, a questi tempi non disponibile, alla testimonianza di ostetriche o di conoscenti), Re Salomone potrebbe usarlo per conoscere chi sia la vera madre. Ottenendo quindi una soluzione al suo problema che sfugge a questo tipo di analisi. In generale, sarà appropriato assumere che l'informazione a disposizione del "pianificatore" tenga già conto di tutto ciò cui si può giungere utilizzando meccanismi "altri".

false mother prefers this outcome to that in which the true mother obtains the baby while the true mother prefers to give the baby away than to see it cut in two. Solomon can give the baby to either of the mothers or order its execution.

Formally, let a be the outcome in which the baby is given to mother 1, b that in which the baby is given to mother 2, and d that in which the baby is cut in two. two preference profiles are possible:

$$\begin{aligned} \theta \text{ (1 is the real mother): } & a \succ_1 b \succ_1 d \text{ and } b \succ_2 d \succ_2 a \\ \theta' \text{ (2 is the real mother): } & a \succ'_1 d \succ'_1 b \text{ and } b \succ'_2 a \succ'_2 d. \end{aligned}$$

Despite Solomon's alleged wisdom, the choice rule f defined by $f(\theta) = \{a\}$ and $f(\theta') = \{b\}$ is not Nash - implementable, since it is not monotonic: $a \in f(\theta)$ and $a \notin f(\theta')$ but there is no outcome y and player $i \in N$ such that $a \succ_i y$ and $y \succ'_i a$. (In the biblical story Solomon succeeds in assigning the baby to the true mother: he gives it to the other woman than be cut in two. Probably the women did not perceive Solomon's instructions as a strategic game form).

INSERTO MIO

Proviamo a "toccare con mano" che alcune game form in forma strategica non danno il risultato desiderato.

Per comodità di rappresentazione, utilizzerò nei giochi le seguenti funzioni di utilità per rappresentare le preferenze:

1 è la vera madre, cioè: $a \succ_1 b \succ_1 d$ and $b \succ_2 d \succ_2 a$. Per 1 uso la seguente funzione di utilità: $u_1(a) = 2$, $u_1(b) = 1$, $u_1(d) = 0$; $u_2(a) = 0$, $u_2(b) = 2$, $u_2(d) = 1$. Il che fa sì che ai tre esiti possibili siano associati i seguenti profili di payoff: $a \mapsto (2, 0)$, $b \mapsto (1, 2)$, $d \mapsto (0, 1)$.

2 è la vera madre, cioè: $a \succ'_1 d \succ'_1 b$ and $b \succ'_2 a \succ'_2 d$. Per 1 uso la seguente funzione di utilità: $u'_1(a) = 2$, $u'_1(b) = 0$, $u'_1(d) = 1$; $u'_2(a) = 1$, $u'_2(b) = 2$, $u'_2(d) = 0$. Il che fa sì che ai tre esiti possibili siano associati i seguenti profili di payoff: $a \mapsto (2, 1)$, $b \mapsto (0, 2)$, $d \mapsto (1, 0)$.

Proviamo a vedere quattro esempi.

La prima "game form" è piuttosto drastica...

$1 \setminus 2$	y_1
x_1	a

Cioè, il bimbo viene assegnato d'imperio alla signora 1. Non c'è bisogno di scrivere i giochi per capire che questi giochi avranno sempre e comunque un unico equilibrio di Nash, cui *corrisponde* l'esito che assegna il bimbo alla signora 1, sia quando lei è la vera madre che quando non lo è. Scrivo comunque, per curiosità, i due giochi risultanti (a sinistra, quando 1 è la vera madre, a destra il caso in cui la vera madre è 2).

$1 \setminus 2$	y_1	$1 \setminus 2$	y_1
x_1	$2, 0$	x_1	$2, 1$

Vediamo un'altra game form:

$1 \setminus 2$	y_1	y_2
x_1	a	d
x_2	d	b

Vediamo che giochi otteniamo. Anche qui, a sinistra c'è il caso in cui 1 è la vera madre.

$1 \setminus 2$	y_1	y_2	$1 \setminus 2$	y_1	y_2
x_1	$2, 0$	$0, 1$	x_1	$2, 1$	$1, 0$
x_2	$0, 1$	$1, 2$	x_2	$1, 0$	$0, 2$

Come si può agevolmente verificare, se la vera madre è 1, abbiamo che l'equilibrio è (x_2, y_2) , quindi il risultato è b , quindi il bimbo è assegnato a 2. Non va bene!

Vediamo un terzo esempio:

$1 \backslash 2$	y_1	y_2	y_3
x_1	a	b	d
x_2	b	d	a
x_3	d	a	b

Di nuovo, vediamo che giochi otteniamo. Il caso in cui 1 è la vera madre è sempre quello a sinistra.

$1 \backslash 2$	y_1	y_2	y_3	$1 \backslash 2$	y_1	y_2	y_3
x_1	2, 0	1, 2	0, 1	x_1	2, 1	0, 2	1, 0
x_2	1, 2	0, 1	2, 0	x_2	0, 2	1, 0	2, 1
x_3	0, 1	2, 0	1, 2	x_3	1, 0	2, 1	0, 2

Nessuno di questi due giochi ha equilibrio di Nash (in strategie pure, s'intende!). Quindi, questo ultimo meccanismo addirittura non produce nessun esito, quindi tanto meno l'esito voluto.

L'ultimo esempio che propongo cerca di usare una forma strategica "abbastanza vicina" ad una possibile interpretazione della storiella biblica. Le strategie sono le seguenti (per il giocatore 1; per 2 sono le "gemelle"):

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \text{mio} \\
 x_2 &= \text{suo} \\
 x_3 &= \text{mio, ma se anche l'altra lo reclama, datelo a lei}
 \end{aligned}$$

La "game form" è:

$1 \backslash 2$	y_1	y_2	y_3
x_1	d	a	a
x_2	b	d	b
x_3	b	a	d

Otteniamo i due giochi seguenti. Il caso in cui 1 è la vera madre è sempre quello a sinistra.

$1 \backslash 2$	y_1	y_2	y_3	$1 \backslash 2$	y_1	y_2	y_3
x_1	0, 1	2, 0	2, 0	x_1	1, 0	2, 1	2, 1
x_2	1, 2	0, 1	1, 2	x_2	0, 2	1, 0	0, 2
x_3	1, 2	2, 0	0, 1	x_3	0, 2	2, 1	1, 0

Si vede che il gioco di sinistra ha due equilibri di Nash: (x_2, y_1) e (x_3, y_1) , che danno entrambi lo stesso esito, ovvero b . Quello di destra ha come equilibri (x_1, y_2) e (x_1, y_3) , che danno entrambi lo stesso esito, stavolta a . Quindi riusciamo ad implementare una choice rule. Peccato che sia la choice rule la quale assegna il bimbo alla donna che *non* è la vera madre!