Giochi semplici, indici di potere e scelte sociali.

S. Moretti
Istituto per la Matematica Applicata, Consiglio Nazionale delle Ricerche
Via De Marini 6 (Torre di Francia), 16149 Genova

F. Patrone
Dipartimento di Matematica, Università di Genova
Via Dodecaneso 35, 16146 Genova

Testo per conferenza IRRSAE del 5 Dicembre 2000.

Una versione "interattiva" di questo materiale è disponibile in rete alla pagina:

http://antares.ima.ge.cnr.it/corsoIRRSAE/

Altro materiale e informazioni sulla Teoria dei Giochi sono disponibili in rete alla pagina:

http://www.dima.unige.it/STAFF/PATRONE/index.htm

Parte III
Scelte sociali

1 Introduzione

Nella prima parte abbiamo osservato come i giochi semplici possano rappresentare modelli formali di meccanismi o regole di votazione utilizzati per prendere decisioni all'interno di consessi di vario tipo. Nella seconda parte abbiamo preso in esame alcuni indici in grado di fornire una misura del potere dei singoli all'interno del meccanismo o regola di votazione. A questo punto abbiamo gli strumenti necessari per affrontare il naturale passo successivo: tener presente che i meccanismi di decisione servono appunto per prendere decisioni. Quale decisione sarà presa (ad esempio sulla base di una o più votazioni) dipenderà dalle preferenze degli individui che compongono il consesso decisionale. Discuteremo quindi rilevanti questioni quali: è possibile ideare un sistema o regola di votazione che sia in grado di evitare al tempo stesso l'arbitrarietà della decisione (cioè che sia in qualche misura "coerente" con le preferenze dei singoli individui), le situazioni senza sbocco e l'ineguaglianza di potere?

Ma prima di tentare di rispondere a questo interrogativo, dovremo affrontare il problema di come rappresentare e trattare le preferenze che gli agenti hanno sulle alternative. I meccanismi di votazione sono volti a catturare le preferenze degli agenti e ad aggregarle, restituire cioè, in qualche maniera più o meno "coerente", un sistema di preferenza collettivo, brutalmente descrivibile come l'ordinamento delle alternative secondo un livello di "importanza sociale" che la collettività, nel complesso, attribuisce a ciascuna di esse. Occorrerà quindi introdurre un linguaggio ad hoc per rappresentare le preferenze individuali, studiarne il comportamento, le modalità di aggregazione e le proprietà e le problematiche che tali modalità possono comportare nella struttura delle preferenze collettive.

Il problema è naturalmente molto antico. Vale la pena di ricordare la rilevanza, anche filosofica, dell'*utilitarismo*, che tentava di offrire una risposta a questi problemi di carattere aggregativo. In generale, comunque, tutto ciò che ha implicazioni con i metodi di aggregazione delle preferenze dei singoli, è di interesse molto vasto, ed è legato anche a questioni fondamentali in scienze politiche ed economia. Gli studiosi di scienze politiche lo incontrano quando devono ideare o valutare sistemi di votazioni per comitati o assemblee legislative. Gli economisti lo affrontano analizzando metodi di razionamento e altri metodi di distribuzione delle risorse, che sono aspetti caratteristici di quella che solitamente viene definita *pianificazione economica.* Questo tipo di considerazioni possono risultare di estrema importanza qualora si voglia, per esempio, determinare la natura di un intervento governativo all'interno di un'economia di libero mercato.

Alcuni meccanismi di scelta decisionale collettiva li abbiamo sin qui visti nella veste di giochi semplici. Si pensi ad esempio ad n giocatori, i quali sono chiamati a scegliere tra due alternative, A_1 e A_2. Ci potranno essere gli individui che sono propensi ad adottare la decisione A_1 (cioè preferiscono l'alternativa A_1 all'alternativa A_2) e quelli che sono propensi ad adottare la decisione A_2 (cioè preferiscono l'alternativa A_1 all'alternativa A_2). Se tutti gli individui sono d'accordo nell'adottare la stessa decisione e se tutti hanno lo stesso peso all'interno del processo decisionale, allora è difficile immaginare che la decisione presa sia diversa da quella voluta all'unanimità. Qualora invece i consensi degli individui siano distribuiti in percentuale non nulla su entrambe le decisione, quale decisione verrà adottata dipende completamente dal meccanismo o regola decisionale utilizzata dal gruppo. Una regola potrebbe essere quella di adottare le decisioni sostenute dalle coalizioni vincenti di un gioco semplice definito sugli n giocatori. Si noti che non si è fatto ancora accenno alle problematiche legate, per esempio, al fatto che coalizioni complementari, che sostengono decisioni diverse, possano essere entrambe vincenti. Per ovviare a questo e ad altri problemi che potrebbero prendere origine dalle considerazioni oggetto dell'ultimo paragrafo della parte sui giochi semplici, si potrebbe ulteriormente immaginare che il gioco semplice sia anche un gioco di maggioranza semplice, in cui tutti gli individui hanno un peso pari ad uno, e che la decisione che verrà adottata sia quella sostenuta da una coalizione vincente.
La regola o metodo decisionale della maggioranza della metà più uno (d'ora in poi semplicemente della *maggioranza*), è forse la più ovvia da prendere in considerazione tra le procedure per aggregare le preferenze individuali; i suoi pregi comprendono la semplicità, l'uguaglianza e, non trascurabile, il peso della tradizione. Tra i suoi difetti potremmo invece indicare la possibilità che nessuna decisione venga presa, qualora cioè i consensi degli n individui siano divisi esattamente a metà sulle due decisioni. Ma a tale regola possiamo muovere una critica ben più profonda. La regola della maggioranza è fondamentalmente una procedura per ordinare coppie di alternative. Quando però bisogna ordinare più di due alternative, la regola della maggioranza incontra una difficoltà di cui il marchese di Condorcet si rese conto già circa 200 anni or sono.

1.1 Paradosso di Condorcet

All'inizio di questo capitolo, abbiamo introdotto il termine "preferenze" attribuendo a tale termine il suo significato comune. In realtà, nell'ambito della teoria economica del consumatore, di cui, in parte, stiamo discutendo, e più in generale nell'ambito delle scelte sociali, con il termine "sistema di preferenze" si intende un oggetto definito come segue

Definizione 1.1 [Preferenze deboli]

Dato un insieme Γ, un *sistema di preferenze* su Γ è definito come un **preordine totale** [1] su Γ, cioè una relazione **riflessiva, transitiva** e **totale** su Γ. Indichiamo tale relazione con il simbolo $\succeq$.

■

L'interpretazione è la seguente: dati due elementi $x, y \in \Gamma$, $x \succeq y$ significa che l'elemento x è preferito o indifferente (si dice anche "debolmente preferito") all'elemento y. Questa relazione, detta anche di *preferenza debole*, è ciò che d'ora in avanti utilizzeremo per ordinare le alternative sulla base dei "gusti" di un decisore. Per l'appunto, detto i il nome di un dato individuo, indicheremo con $\succeq_i$ il suo personale sistema di preferenze.

Esercizio 1.1 *Si provi a definire la relazione di indifferenza $\sim$ a partire dalla relazione di prefernza debole.*

Esercizio 1.2 *La relazione di indifferenza $\sim$, è una relazione di equivalenza?*

Da un sistema di preferenze deboli come definite in 1.1, possiamo definire un sistema di *preferenze strette* così definite:

Definizione 1.2 [Preferenze strette]
Dato un insieme Γ e un preordine totale $\succeq$ (sistema di preferenze deboli) su Γ, definiamo la relazione $\succ$ *sistema di preferenze strette* su Γ nel modo seguente:

$$\forall x, y \in \Gamma \qquad x \succ y \Leftrightarrow \Big(x \succeq y \quad e \quad non(y \succeq x)\Big) \tag{1}$$

■

L'interpretazione in questo caso è la seguente: dati due elementi $x, y \in \Gamma$, $x \succ y$ significa che l'elemento x è strettamente preferito all'elemento y, non è possibile cioè, tramite questa relazione, catturare la possibilità che due elementi di Γ siano indifferenti per un dato individuo. Come prima, detto i il nome di un dato individuo, indicheremo con $\succ_i$ il suo personale sistema di preferenze strette.

Esercizio 1.3 *Si dimostri che $\succ$ è asimmetrica e negativamente transitiva. Riportiamo per comodità sia la definizione di asimmetria che di transitività negativa:*
asimmetria*: non esiste* $x, y \in X \quad t.c. \quad (x \succ y \quad e \quad y \succ x)$
transitività negativa*:* $\forall x, y, z \in X \quad [x \succ y \Rightarrow (x \succ z \ \mathit{oppure}\ y \succ x)]$

[1] Si ricordi che una relazione ρ tra gli elementi di un insieme X è un *ordine totale* se tale relazione è un preordine totale su X che sia anche antisimmetrico, cioè non esistano elementi $x,\ y \in X$ con $x \neq y$ tali che $x\rho y$ e $y\rho x$

Esercizio 1.4 *Dimostrare che* $x \succ y \Rightarrow x \succeq y$.

Esercizio 1.5 *Data una relazione* $\succ$ *su* Γ *asimmetrica e negativamente transitiva, si definisca la relazione* $\succeq$ *sempre su* Γ *come non*$(x \succ y) \Rightarrow (y \succeq y)$ *per ogni coppia di elementi* $x, y \in \Gamma$. *Provare che* $\succeq$ *è un preordine totale.*

Esercizio 1.6 *Sia* $\succeq$ *un preordine totale su* Γ. *Sia invece* $\succ$ *una relazione su* Γ *definita come in 1.2. Si consideri inoltre una relazione* $\sqsupseteq$ *tale che per ogni* $x, y \in \Gamma$ *si abbia* $\Big(x \sqsupseteq y \Rightarrow non(y \succ x)\Big)$.

Le relazioni mostrate, che alla luce di quanto vedremo in questo paragrafo potrebbero sembrare un'inutile appesantimento formale, ci torneranno molto utili nei paragrafi che seguiranno. È bene, quindi, riuscire a prendere confidenza con il loro utilizzo a partire dai semplici esempi presenti in questo paragrafo.
Definiamo formalmente ciò che d'ora in poi chiameremo *regola di determinazione delle scelte collettive* (o, più brevemente, regola di scelta collettiva) a partire dall'insieme di preferenze di n individui

Definizione 1.3 Dato un insieme N di n individui e l'insieme $\mathcal{P}$ dei preordini totali su un insieme di alternative Γ, definiamo *regola di determinazione delle scelte collettive*, una funzione

$$P : \underbrace{\mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \ldots \times \mathcal{P}}_{n \text{ volte}} \to \mathcal{P} \tag{2}$$

Chiameremo *sistema di preferenze collettivo* $\succeq_N$ il valore che la funzione P assume in corrispondenza della n-upla di prefernze $(\succeq_i)_{i \in N}$ su Γ.
Un elemento $(\succeq_i)_{i \in N}$ di $\mathcal{P}^n$ verrà detto profilo di preferenze.

■

Esempio 1.1 *Si consideri un insieme* N *di* n *individui e l'insieme di alternative* Γ. *Il meccanismo per il quale si sceglie come sistema di preferenze collettivo* $\succeq_N$ *su* Γ *il sistema di preferenze individuale su* Γ *del giocatore corrispondente al numero riportato su una pallina estratta a caso da un urna contente* n *palline numerate da* 1 *a* n, *è una regola per la determinazione delle scelte sociali.*

Esercizio 1.7 *Quante sono le regole per la determinazione delle scelte sociali con tre agenti e tre alternative?*

Non tutte le regole saranno accettabili. Varie sono le restrizioni che si possono effettuare. Alcune le abbiamo già fatte implicitamente: primo, il preordine collettivo dipende dai preordini individuali (anzi, dai preordini di

tutti gli agenti); secondo, che anche il sistema di preferenze collettivo sia un preordine totale; terzo, che tale regola "funzioni" a partire da qualsiasi preordine totale che abbiano gli agenti.
Si supponga che un comitato composto da tre individui, $N = \{a, b, c\}$, debba scegliere tra tre alternative, $\Gamma = \{x, y, z\}$. Si supponga che il sistema di preferenze di a sia tale che $x \succeq_a y$, $x \succeq_a z$ e $y \succeq_a z$ ma $non(y \succeq_a x)$, $non(z \succeq_a x)$ e $non(z \succeq_a y)$. In altri termini le preferenze di a sono rappresentate dal sistema di preferenze strette $x \succ_a y \succ_a z$ (cioè l'individuo a preferisce strettamente che sia nominato l'alternativa y all'alternativa z e l'alternativa x a entrambe le alternative y e z). Il sistema di preferenze di b è $y \succ_b z \succ_b x$ e quello di c è $z \succ_c x \succ_c y$. In questo caso, la votazione a maggioranza tra coppie di alternative produce un ciclo: x sconfigge y, y sconfigge z e z sconfigge x. Questo ciclo di votazioni è l'esempio più semplice di paradosso di Condorcet.
Che cosa è successo? Semplicemente ci siamo resi conto che il meccanismo della maggioranza semplice, che pone $k \succeq_N h$ per ogni $h, k \in \Gamma$ se il numero di persone che preferiscono strettamente k ad h è maggiore o uguale di quelle che preferiscono strettamente h a k, non è una regola di determinazione delle scelte collettive su Γ a partire dalle preferenze degli individui in N così come l'abbiamo definita. Si verifica infatti facilmente che $\succeq_N$ non è transitiva. Basta verificare, come mostrato in precedenza in maniera intuitiva, che

$$\left.\begin{array}{l} x \succ_a y \succ_a z \\ y \succ_b z \succ_b x \\ z \succ_c x \succ_c y \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad y \succ_N x, \quad z \succ_N y, \quad x \succ_N z$$

(Si noti che $y \succ_N x \Rightarrow y \succeq_N x$, $z \succ_N x \Rightarrow z \succeq_N x$ e $x \succ_N z \Rightarrow \text{non}(z \succeq_N x)$)
Gli studiosi di scienze politiche hanno identificato molti casi storici di cicli di votazioni. William H. Riker, dell'Università di Rochester, sostiene per esempio che l'adozione del 17° Emendamento della Costituzione degli Stati Uniti, che prevede l'elezione diretta dei senatori degli Stati Uniti, fu ritardata per dieci anni da manovre parlamentari basate su cicli di votazione fra lo *status quo* (la nomina dei senatori da parte dell'assemblea legislativa dello Stato) e due versioni dell'emendamento.
Quando sono possibili più di due alternative, è necessario qualche principio nuovo per produrre delle scelte fra coppie ordinate di alternative. I modelli di preferenza che inducono il paradosso della votazione creano difficoltà dal momento che ogni alternativa perde (o vince) nei confronti di un'altra.
Un altro metodo per procedere a una scelta fra coppie ordinate di alternative è di stabilire un'agenda in cui venga specificato in quale ordine le alternative saranno prese in considerazione. L'agenda, per esempio, potrebbe richiedere una votazione iniziale per z contro y, seguita da una seconda fase in cui il vincitore della precedente sarebbe contrapposto a x. Secondo questa agenda il nostro comitato di tre membri voterebbe prima per z contro y e alla

seconda votazione z sconfiggerebbe x. Indubbiamente questo metodo non dà origine a cicli che impediscono la scelta di una delle alternative. Non solo: l'agenda fornisce anche un preordine totale collettivo sulle alternative. In altri termini il metodo dell'agenda, al contrario del metodo della maggioranza semplice (cioè senza agenda) è in effetti una regola di determinazione delle scelte collettive come definita in 1.3. Si noti che in tutto ciò si assume che sia fissata un'agenda "a priori", nel senso che essa sia indipendente dalle preferenze possedute dagli individui. È facile verificare che in questa situazione ognuna delle tre agende possibili dà come vincitrice l'alternativa presa in considerazione per ultima: l'agenda determina il risultato. È quindi evidente l'arbitrarietà della scelta di quale alternativa debba essere considerata per ultima. Non solo: un tale metodo si presta molto bene alla manipolazione di chi deve predisporre l'agenda.

Esercizio 1.8 *Si supponga che che l'alternativa z venga confrontata, all'interno del comitato composto dai tre membri precedenti, con l'alternativa y: y sconfiggerà z e l'individuo a sarà scontento. In che misura a può agire sull'agenda (tramite, per esempio, l'introduzione di un emendamento ad una delle due alternative z e y), per ottenere il passaggio della mozione da lui preferita?*

C'è un altro aspetto da esaminare che il meccanismo dell'agenda ci offre: gli agenti possono mentire sulle proprie preferenze per proprio vantaggio. Si consideri ancora l'agenda in cui z viene considerata per ultima (cioè prima avviene il confronto tra x e y e poi, la vincente tra queste due, viene confrontata con z). Se ogni membro del comitato dà ogni volta il proprio voto alla sua vera preferenza, l'alternativa vincente, z, è quella meno gradita da a. Si supponga ora che nella prima votazione a dia invece il voto a y; in tal caso prevale y, che può battere z nella seconda votazione. Con questo stratagemma a blocca la scelta dell'alternativa più sgradita.
Si noti come con due sole alternative, x e y, una votazione a maggioranza non può produrre un ciclo. Un ciclo richiederebbe sia che più della metà dei votanti preferisca strettamente x a y, sia che più della metà dei votanti preferisca strettamente y ad x, il che è chiaramente impossibile. Con tre o più alternative, invece, lo abbiamo visto, si può creare un ciclo. Si potrebbe obiettare che il meccanismo della maggioranza non è l'unico modo per cercare di aggregare le preferenze collettive di una società. È anche vero però che il problema della nascita di un ciclo, o, se vogliamo, il mancato rispetto della transitività da parte dell'ordinamento collettivo, non è l'unico problema che potrebbe sorgere. Come già accennato in precedenza, possiamo fare altre restrizioni sulle regole di determinazione. Per esempio potremmo richiedere che la scelta tra due alternative non sia influenzata dall'ordinamento che le altre alternative hanno in base alle preferenze degli individui coinvolti.

Affronteremo questo aspetto nel prossimo paragrafo

2 Metodo di conteggio di Borda

Abbiamo definito come regola di scelta collettiva (definizione 1.3), una funzione che assegna ad un vettore di sistemi di preferenze individuali un sistema di preferenze per la collettività. D'altra parte, nei discorsi sin qui condotti, abbiamo parlato anche di meccanismi in grado di fornire, dato un vettore di sistemi di preferenze individuali, una singola alternativa, quella cioè che verrà adottata dal consesso. La connessione tra le due funzioni è immediata: data una regola per la scelta di un sistema di preferenze collettive, possiamo determinare quale sarà l'alternativa selezionata dal consesso, ovviamente quella (o quelle, perchè potrebbero essere più di una) che non ha alternative che sono strettamente preferite ad essa nel preordine totale collettivo.
Ad ogni modo, non c'è dubbio che l'informazione che risiede nel sistema di preferenze collettivo sia di più di quella che ci potrebbe interessare qualora volessimo determinare l'alternativa o le alternative preferite dalla collettività. In altri termini, se siamo disinteressati a come la collettività classifica le alternative che, rispetto al preordine totale collettivo, perdono il confronto contro qualche altra alternativa, allora potremmo focalizzare la nostra attenzione unicamente sulle alternative che risultano essere collettivamente preferite alle altre.
Anzi, quello appena scritto sembrerebbe un requisito oltremodo ragionevole da richiedere ad una regola di scelta: se quello che interessa è unicamente l'alternativa preferita (anche se debolmente) a tutte le altre nel sistema di preferenze collettivo, perchè curarsi di come i singoli individui del consesso ordinino le altre alternative nei propri sistemi di preferenza individuali? Eppure non è scontato che una regola di scelta collettiva soddisfi un tale requisito, come vedremo di seguito.

Definizione 2.1 [Metodo del conteggio di Borda]
Dato un insieme di alternative Γ e un consesso decisionale costituito da un insieme N di n individui, il metodo di conteggio di Borda definisce che per ogni agente in N vengano elencati nell'ordine di preferenza gli elementi di Γ e vengano attribuiti il punteggio di 1 all'ultimo (quello che non è strettamente preferito ad alcuna alternativa in Γ), 2 al penultimo e così via.
La somma dei punteggi ottenuti dai vari elementi in Γ fornisce la classificazione collettiva tra le alternative in Γ.

■

Esercizio 2.1 *Provare che il metodo del conteggio di Borda è una regola di scelta collettiva come definita in 1.3.*

Consideriamo il seguente esempio:

Esempio 2.1 *Sia dato un insieme di agenti* $N = \{1, 2, 3\}$ *che possiedono un sistema di preferenze sull'insieme delle alternative (o candidati)* $\Gamma = \{a, b, c, d, e, f\}$. *I sei sistemi di preferenze sono i seguenti:*
$a \succ_1 b \succ_1 c \succ_1 d \succ_1 e \succ_1 f$
$d \succ_2 c \succ_2 b \succ_2 e \succ_2 a \succ_2 f$
$d \succ_3 c \succ_3 b \succ_3 f \succ_3 a \succ_3 e$
La regola di Borda fornisce i punteggi rappresentati nella seguente tabella

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1	6	5	4	3	2	1
2	2	4	5	6	3	1
3	2	4	5	6	1	3
totale	10	13	14	15	6	5

Come si vede dalla classificazione totale, l'alternativa d *è quella preferita collettivamente.*
Ma se le preferenze di 1 *cambiano per quel che riguarda il confronto tra le alternative* b *e* c *(cioè le preferenze di* 1 *diventano* $c \succ_1 b \succ_1 a \succ_1 d \succ_1 e \succ_1 f$*) e tutti gli altri sistemi di preferenze rimangono inalterati, il nuovo conteggio di Borda diventa:*

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1	4	5	6	3	2	1
2	2	4	5	6	3	1
3	2	4	5	6	1	3
totale	8	13	16	15	6	5

La regola di Borda permette che un cambio di ordine nelle preferenze individuali di 1*, tra due alternative che non erano comunque quelle con il maggior punteggio nella classificazione totale precedente, modifichi la scelta dell'alternativa da parte della collettività dei tre agenti: l'alternativa* c *è ora preferita collettivamente all'alternativa* d*, preferita dal sistema di preferenza collettivo ottenuto in precedenza.*

Abbiamo visto che un cambio nell'ordinamento di preferenze individuale tra due alternative si può ripercuotere sulla classificazione di una terza alternativa, diversa dalle precedenti, da parte di una regola di scelta collettiva. In particolare, nell'esempio precedente, quella che era l'alternativa preferita dalla collettività ha perso la propria posizione di predominanza in seguito al cambiamento dei gusti di un individuo su altre due alternative. Ma la regola di scelta collettiva, come già ripetutamnte osservato, fornisce un sistema di

preferenze. E allora è naturale pensare che quanto sia stato detto sin qui sia estendibile a qualsiasi alternativa, non necessariamente quella preferita nell'ordinamento di preferenze collettivo.
Potremmo cioè richiedere ulteriormente che l'ordinamento collettivo di qualsiasi coppia di alternative dipenda solo dagli ordinamenti individuali di quelle due alternative. Date cioè due alternative x e y, finchè resta invariato l'ordinamento di ciascun individuo relativamente a queste due alternative, potremmo richiedere che resti immutato anche l'ordinamento collettivo di x ed y. Vediamo un altro esempio in cui la regola di Borda non rispetta la suddetta proprietà, questa volta per quel che riguarda una classificazione intermedia:

Esempio 2.2 *Riprendiamo l'esempio del comitato descritto nel precedente paragrafo. Possiamo rappresentare la situazione delle preferenze secondo il metodo di Borda per mezzo della seguente tabella (si ricorda che* $x \succ_a y \succ_a z$*,* $y \succ_b z \succ_b x$ *e* $z \succ_c x \succ_c y$*):*

	x	y	z
a	3	2	1
b	1	3	2
c	2	1	3
totale	6	6	6

Quindi il comitato risulta essere indifferente tra le tre alternative (N.B.: la transitività delle preferenze è rispettata). Si supponga che le preferenze di a cambino da $x \succ_a y \succ_a z$ *in* $x \succ_a z \succ_a y$*, possiamo rappresentare la situazione delle preferenze secondo il metodo di Borda per mezzo della seguente tabella:*

	x	y	z
a	3	1	2
b	1	3	2
c	2	1	3
totale	6	5	7

Sebbene nessun votante abbia cambiato il proprio ordinamento di x *e* y*, la votazione basata sul metodo del conteggio di Borda dà ora un ordinamento collettivo in cui* x *è preferito a* y*, in quanto* x *continua a ricevere* 6 *punti, mentre* y *ora ne ha solo* 5*. Con tale regola di scelta, quindi, l'ordinamento collettivo di* x *e* y *dipende pertanto non solo dal modo in cui gli individui ordinano* x *e* y*, ma anche dalla posizione relativa di altre alternative, quali* z*.*

Chiameremo *Indipendenza dalle alternative irrilevanti (IIA)* la proprietà per la quale la classificazione collettiva di due alternative dipende solo dalla loro posizione relativa nei sistemi di preferenze dei vari individui e non da considerazioni sulle altre alternative. Si noti che una tale proprietà limita le

informazioni individuali necessarie per determinare l'ordinamento collettivo di una coppia di alternative: questo può essere un vantaggio in quelle situazioni in cui è difficile e costoso stabilire gli ordinamenti individuali.
Come avevamo fatto per il paradosso di Condorcet, mostrando che l'ordinamento fornito dal meccanismo della maggioranza non soddisfa la proprietà della transitività che un sistema di preferenze dovrebbe avere per definizione, possiamo formalizzare la proprietà IIA nelle seguente definizione, e successivamente indicare come questa non sia rispettata (cosa che per altro abbiamo già visto negli esempi precedenti) dal metodo del conteggio di Borda.

Definizione 2.2 [Indipendenza dalle Alternative Irrilevanti (IIA)]
Dato un insieme N di n agenti, un insieme di alternative Γ e una regola di scelta collettiva P, diciamo che tale regola per la scelta collettiva P è *indipendente dalle alternative irrilevanti* se
$\forall x, y \in \Gamma \quad \Big([\forall h \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad (x \succeq_h y) \Leftrightarrow (x \sqsupseteq_h y)] \Rightarrow [(x \succeq_N y) \Leftrightarrow (x \sqsupseteq_N y)]\Big) \qquad \forall\ (\succeq_h)_{h\in N}, (\sqsupseteq_h)_{h\in N} \in \mathcal{P}^n$
dove $\succeq_N$ e $\sqsupseteq_N$ sono gli ordinamenti collettivi ottenuti da P a partire rispettivamente da $(\succeq_h)_{h\in N}$ e $(\sqsupseteq_h)_{h\in N}$.

■

Rivediamo alla luce di questa definizione l'esempio 2.2. Si ha:

$$\left.\begin{array}{c} x \succ_a y \succ_a z \\ y \succ_b z \succ_b x \\ z \succ_c x \succ_c y \end{array}\right\} \Rightarrow \Big(x \text{ pti } 6,\ y \text{ pti } 6,\ z \text{ pti } 6\Big) \Rightarrow \Big(y \sim_N x, z \sim_N y, x \sim_N z\Big)$$

$$\left.\begin{array}{c} x \sqsupset_a z \sqsupset_a y \\ y \sqsupset_b z \sqsupset_b x \\ z \sqsupset_c x \sqsupset_c y \end{array}\right\} \Rightarrow \Big(x \text{ pti } 6,\ y \text{ pti } 5,\ z \text{ pti } 7\Big) \Rightarrow \Big(x \sqsupset_N y, z \sqsupset_N y, z \sqsupset_N y\Big)$$

Si noti, rispetto alla definizione 2.2, che $(x \succeq_a y,\ y \succeq_b x,\ x \succeq_c y)$ e $(x \sqsupseteq_a y,\ y \sqsupseteq_b x,\ x \sqsupseteq_c y)$ cioè le due alternative x, y sono classificate sullo stesso identico modo da ciascun agente, nei due diversi profili di preferenze considerati.
Quindi la definizione 2.2 non è evidentemente rispettata dalla regola di Borda.
Ancora una considerazione sulla IIA che approfondiremo nel seguito. Così come il meccanismo di maggioranza con agenda si presta a manipolazione, le regole di scelta sociale che non rispettano la IIA, in un senso abbastanza analogo, soffrono dello stesso problema. Si consideri l'esempio 2.1. La computazione dei punteggi totali è basata sul fatto che sono conosciuti i sistemi di preferenza individuale tra i vari giocatori. Ci si potrebbe chiedere da dove provenga tale informazione. È evidente che se l'informazione proviene dagli individui, non c'è nessun motivo per gli individui di dire la verità se non quello che da essa possa provenire la scelta dell'alternativa

da loro preferita. Viceversa, se per qualche ragione una dichiarazione falsa può favorirli, se si suppone che il loro agire sia condizionato dal loro sistema di preferenze sulle alternative, allora essi mentiranno. Se così stanno le cose, e se i sistemi di preferenza individuale sono dedotti dalle dichiarazioni degli agenti, allora il giocatore 1 che ha un sistema di preferenze $a \succ_1 b \succ_1 c \succ_1 d \succ_1 e \succ_1 f$ (che insieme agli altri due sistemi di preferenze determinerebbe la scelta dell'alternativa d), dichiarerà di possedere il sistema di preferenze $c \succ_1 b \succ_1 a \succ_1 d \succ_1 e \succ_1 f$, che determinerà collettivamente la scelta dell'alternativa c, la quale, nel sistema di preferenze individuale di 1, è preferita alla d.

Esercizio 2.2 *Cosa succede se in un meccanismo analogo alla regola di Borda n individui devono fissare loro il punteggio (ad esempio su una scala da* 0 *a* 100*)? Cosa fareste voi? Tale meccanismo è una regola di determinazione della scelta collettiva? Soddisfa la IIA? Conviene mentire? E se sì , come?*

Esercizio 2.3 *Il Consiglio di Sicurezza delle Nazioni Unite consiste di cinque stati permanenti e dieci altri membri. Le mozioni devono essere approvate da nove membri, tra i quali devono essere inclusi tutti e cinque i membri permanenti.*
Tale meccanismo di scelta è una regola di determinazione delle scelte sociali? Produce cicli?

3 Teorema di Arrow

Nel paragrafo introduttivo avevamo indicato come molto plausibile che, in un consesso in cui tutti i partecipanti sono d'accordo, la scelta collettiva dell'alternativa ricada sull'alternativa preferita da tutti. Analogamente possiamo immaginare che, date due alternative qualunque x e y, se ogni individuo preferisce x a y, l'ordinamento collettivo debba mettere x al di sopra di y (a prescindere dalla posizione delle due alternative rispetto tutte le altre). Chiameremo questa condizione come *condizione dell'unanimità*. Se si accetta l'opinione secondo la quale l'ordinamento di una società dovrebbe riflettere le preferenze dei propri membri, è difficile trovare da ridire sulla condizione dell'unanimità. Definiremo quindi:

Definizione 3.1 [Unanimità]
Dato un insieme N di n agenti, un insieme di alternative Γ e una regola di scelta collettiva P, diciamo che tale regola per la scelta collettiva P rispetta la *condizione dell'unanimità* se
$\forall x, y \in \Gamma,\ \forall\ (\succeq_h)_{h \in N} \in \mathcal{P}^n \quad \Big([\forall h \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad (x \succeq_h y)] \Rightarrow (x \succeq_N y) \Big)$
dove $\succeq_N$ è l'ordinamento collettivo ottenuto da P a partire da $(\succeq_h)_{h \in N}$.

■

Esercizio 3.1 *Trovare una regola di determinazione della scelta collettiva che non rispetti la condizione dell'unanimità.*

Una regola che sicuramente rispetta la condizione dell'unanimità è qualsiasi regola di scelta collettiva che rispetti la *condizione di dittatorialità.* Una regola dittatoriale è una regola che, dato un insieme di sistemi di preferenze individuali qualunque, determina un sistema di preferenze collettive identico al sistema di preferenze di un dato singolo individuo. È così giustificata la relazione tra le due condizioni: una regola dittatoriale è anche unanime perchè quando tutti gli individui sono d'accordo tra loro, sono necessariamente d'accordo anche con il dittatore, che fa parte dell'insieme di tutti gli individui. Formalmente:

Definizione 3.2 [Dittatorialità]
Dato un insieme N di n agenti, un insieme di alternative Γ e una regola di scelta collettiva P, diciamo che tale regola per la scelta collettiva P rispetta la *condizione di dittatorialità* se
$\exists \tilde{h} \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tale che $P(\succeq_1, \ldots, \succeq_{\tilde{h}}, \ldots, \succeq_n) = \succeq_{\tilde{h}} \quad \forall \quad (\succeq_h)_{h\in 1} \in \mathcal{P}^n$
cioè $\succeq_{\tilde{h}}$, che rappresenta il sistema di preferenze del giocatore $\tilde{h} \in N$, coincide con l'ordinamento collettivo $\succeq_N$ ottenuto da P a partire da $(\succeq_h)_{h\in 1}$.

■

Ci sorpenderemmo se fosse vero il contrario, cioè che ogni regola di scelta collettiva che rispetti la condizione di unanimità rispetti anche la condizione di dittatorialità.

Esercizio 3.2 *Trovare una regola di scelta collettiva che rispetti la condizione dell'unanimità ma non quella di dittatorialità.*

Non c'è invece modo di evitare la "sorpresa" che deriva dall'enunciato del teorema di Arrow (1951)

Teorema 3.1 (Arrow (1951)) *Dato un insieme N di n agenti e un insieme di alternative Γ con almeno tre elementi, una regola di determinazione della scelta collettiva P che rispetti la condizione IIA e la condizione dell'unanimità è anche dittatoriale.*
Dim.
Dimostreremo il teorema attraverso una sequenza di quattro passaggi fondamentali. Nel passo 1) proveremo che se un profilo di preferenze indivuali rispondente alle condizioni espresse nell'enunciato è tale per cui ogni individuo pone una data alternativa in cima o in fondo al proprio ordinamento individuale, allora tale alternativa occuperà necessariamente, nell'ordinamento collettivo, una posizione di testa o di coda. Sfrutteremo questa proprietà per dimostrare al passo 2) l'esistenza di un individuo in grado di far cambiare la classificazione di un'alternativa dalla posizione peggiore in un

particolare ordinamento collettivo a quella migliore. Al passo 3) mostreremo che l'individuo di cui dimostriamo l'esistenza al passo 2) è in grado di determinare la classificazione collettiva tra molte coppie di alternative, cioè è dittatore per quel che riguarda l'ordinamento collettivo di un certo numero di alternative. Al passo 4), infine, mostreremo come, la costruzione ottenuta dai passi precedenti, determini l'esistenza di un dittatore così come definito nella definizione 3.2.
Per alleggerire le notazioni, indicheremo $P\Big((\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ *con* $(\succeq_i)_{i\in N}$*, laddove non ci sia rischio di confusione.*
passo 1)
Dimostriamo per prima cosa che per ogni n-upla di sistemi di preferenza $(\succeq_i)_{i\in N}$ *tale che esiste* $x \in \Gamma$ *per cui vale* $(x \succeq_i y\ \forall\ y \in \Gamma,\ y \neq x,\ \forall\ i \in N)$ *oppure* $(y \succeq_i x\ \forall\ y \in \Gamma,\ y \neq x,\ \forall\ i \in N)$*, si ha che* $\succeq_N$ *è tale per cui* $(x \succeq_N y\ \forall\ y \in \Gamma)$ *oppure* $(y \succeq_N x\ \forall\ y \in \Gamma)$.
Supponiamo al contrario che esista un vettore $(\succeq_i)_{i\in N}$ *tale che esista* $x \in \Gamma$ *per cui vale* $(x \succeq_i y,\ \forall\ y \in \Gamma,\ y \neq x,\ \forall\ i \in N)$ *oppure* $(y \succeq_i x,\ \forall\ y \in \Gamma,\ y \neq x,\ \forall\ i \in N)$ *ma che esistano* $n,\ m \in \Gamma,\ n \neq m,\ n \neq x,\ m \neq x$ *tali che* $a \succ_N x$ *e, contemporaneamente,* $x \succ_N b$.
Grazie alla indipendenza dalle alternative irrilevanti, possiamo supporre che la classificazione collettiva $a \succ_N x$ *e* $x \succ_N b$ *rimanga tale anche quando ogni individuo modificasse i propri sistemi di preferenza in maniera tale per cui per ogni* $i \in N$ *si avesse* $b \succeq_i a$ *e fosse inalterata la classificazione di* x *rispetto le altre alternative. La transitività di* $\succ_N$ *implicherebbe che* $a \succ_N b$*, ma per l'unanimità di* $\succeq_N$ *si dovrebbe avere* $b \succeq_N a$*, che produce una contraddizione.*
passo 2)
Consideriamo un profilo di preferenze $(\succeq_i)_{i\in N}$ *tale che esista un'alternativa* $x \in \Gamma$ *per cui* $y \succeq_i x,\ \forall\ \ i \in N$ *e* $\forall\ y \in \Gamma,\ y \neq x$*. Per l'unanimità di* P *dovrà essere* $y \succeq_N x,\ \forall\ y \in \Gamma,\ y \neq x$.
Si indichi una successione qualsiasi di giocatori $s = 1, 2, \ldots, n$ *e si supponga che ciascun giocatore* $i \in N$ *cambi, uno dopo l'altro secondo la successione* s *e partendo dal giocatore* 1 *nella successione, il proprio ordinamento ponendo* $x \succeq_i y,\ \forall\ y \in \Gamma,\ y \neq x$ *e lasciando inalterate le altre classificazioni tra alternative. Sia* $j(x) \in N$ *il primo giocatore nella successione* s *per il cui cambiamento si abbia la modifica della classificazione collettiva tale per cui non sia più vero che* $y \succeq_N x,\ \forall\ y \in \Gamma,\ y \neq x$ *(per l'unanimità un cambio deve avvenire almeno quando sia stato effettuato il cambiamento nelle preferenze individuali da parte dell'n-esimo giocatore nella successione s). Si indichi con* Π *l'n-upla di sistemi di preferenze individuali che si hanno nel momento in cui ha cambiato il proprio sistema di preferenze il giocatore precedente a* $j(x)$ *nella successione* s*. Sia invece* Π' *l'n-upla di sistemi di preferenze individuali che si hanno nel momento in cui ha cambiato il proprio sistema di preferenze il giocatore* $j(x)$*. Dal momento che* $\succeq_N' = P(\Pi')$

è tale per cui non è vero che $y \succeq'_N x$, $\forall\, y \in \Gamma,\ y \neq x$, *deduciamo da quanto dimostrato nel passo 1) (essendo comunque tutti i sistemi di preferenze individuali tali per cui* x *è in cima o in fondo agli ordinamenti) che* $x \succeq'_N y$, $\forall\, y \in \Gamma,\ y \neq x$.

passo 3)

Dimostriamo ora che $j(x)$ *determina la classificazione tra qualsiasi coppia di alternative* $c, d \in \Gamma$, $c \neq d$, $c \neq x$, $d \neq x$, *non coinvolgente* x *del passo precedente. Si costruisca a partire dall'n-upla* Π' *l'n-upla* Π'' *tale che il sistema di preferenze individuali di* $j(x)$ *rimanga inalterato salvo l'unica differenza per cui* $c \succeq_{j(x)} x \succeq_{j(x)} d$, *e che gli altri giocatori abbiano qualunque sistema di preferenza con l'unico vincolo che* x *occupi la stessa posizione (di alternativa migliore o peggiore) che aveva in ciascun sistema di preferenza individuale nell'n-upla* Π'. *Per la IIA,* $\succeq''_N = P(\Pi'')$ *è tale che* $c \succeq''_N x$ *(dal momento che la relazione di preferenza tra* c *e* x *è esattamente come era in* Π*), e* $x \succeq''_N d$ *(dal momento che la relazione di preferenza tra* d *e* x *è esattamente come era in* Π'*). Per la transitività di* $\succeq''_N$, $c \succeq''_N d$. *Per la IIA di* P, *quindi, un qualsiasi sistema di preferenza sociale determinato da* P *su ogni coppia di preferenze diverse da* x *deve essere d'accordo con la preferenza di* $j(x)$ *sulla stessa coppia.*

passo 4)

Dimostriamo infine che $j(x)$ *è un dittatore.*

Data ogni coppia di alternative $e, f \in \Gamma$ *con* $e \neq f$, *possiamo prendere una qualsiasi altra alternativa (si ricordi che le alternative sono* $p \geq 3$*)* $g \in \Gamma$, $g \neq x$, *differente dalle precedenti e metterla in fondo all'ordinamento di ciascun giocatore. Quindi esisterà un giocatore* $j(g) \in N$ *che, per il passo 3), sarà in grado di determinare la relazione di preferenza sociale collettiva tra ogni coppia di alternative* $e, f \in \Gamma$, $e \neq f$, $e \neq g$, $f \neq g$. *Questo significa che, per* $p > 3$, $j(x)$ *e* $j(g)$ *saranno entrambi in grado di determinare la relazione di preferenza collettiva sulle stesse coppie di alternative non coinvolgenti rispettivamente* x *e* g. *Poichè* $x \neq g$, *se ne deduce perciò che deve essere* $j(x) = j(g)$ *(per* $p = 3$ *basta considerare tre individui in grado di influenzare la preferenza sulle tre coppie di alternative diverse possibili e si vede che i tre individui devono essere lo stesso individuo).* ∎

Quello che questo teorema ci dice è che se cerchiamo una regola di determinazione della scelta sociale che rispetti la condizione di IIA e dell'unanimità e in più non sia dittatoriale, ebbene siamo destinati a fallire nella nostra ricerca. Per questo motivo il teorema di Arrow è anche detto *di impossibilità*. In altre parole, tutte le proprietà che abbiamo visto sino a questo momento, a partire da quelle che definiscono la relazione di preferenza debole (che è riflessiva, transitiva e totale), passando per la definizione di regola per la determinazione delle scelte sociali, alla IIA e unanimità, sono requisiti di

per se allettanti che però, assieme, sono perniciosi.
La dittatorialità di una regola per la determinazione delle scelte sociali è determinata a partire da alcuni requisiti apparentemente modesti. Ci si potrebbe chiedere se effettivamente, ad un'analisi più attenta, questi requisiti continuino ad apparire modesti e soprattutto se ci sono requisiti meno "esigenti" di quelli richiesti da Arrow che evitino l'infelice conclusione del suo teorema.
Per esempio, nella definizione di regola per la determinazione delle scelte sociali, avevamo implicitamente imposto che la regola determinasse un preordine totale collettivo a partire da qualsiasi n-upla di preordini totali individuali. Questo requisito, che è implicito nella definizione di regola come la funzione definita in 1.3, spesso è visto come un requisito a parte e viene denominato *portata universale*. In realtà, tale requisito potrebbe essere indebolito, richiedendo che la funzione sia definita su un sottoinsieme di tutti i profili di preferenza individuali e sostenendo che non tutte le configurazioni logicamente possibili di ordinamenti individuali sono ugualmente probabili. Poichè alcune configurazioni possono essere estremamente improbababili, esigere che una regola aggreghi in maniera coerente ogni configurazione di sistemi individuali possibile in un ordinamento collettivo, sembra un presupposto inutilmente troppo forte.
La strategia più comune nell'indebolire questo requisito è stata quella di concentrarsi su una procedura particolare (nell'esempio che vedremo la regola della maggioranza) e di cercare restrizioni che permettano di eliminare quelle configurazioni di preferenze individuali che determinano preferenze collettive intransitive.
Una delle più famose restrizioni non banali è l'assunzione di preferenze con un solo picco, indicata negli anni quaranta dall'economista inglese Duncan Black. Si ha assunzione di preferenze con un solo picco quando tutti gli individui valutano delle alternative in base ad un unico criterio e, in qualsiasi scelta fra alternative prese a coppie, ogni individuo vota per l'alternativa più vicina all'alternativa maggiormente preferita. Ogni individuo, per esempio, potrebbe ordinare dei candidati in base alla loro maggiore o minore vicinanaza alla propria posizione nello spettro politico che va dalla Sinistra alla Destra.

Esempio 3.1 *Supponiamo che l'insieme dell'alternative sia costituito da tre candidati $\{x, y, z\}$ in cui x è più di Sinistra di y e y è più di Sinistra di z. Un consesso con assunzione di preferenze con un solo picco che comprende individui di Sinistra (con preferenze $\succeq_S$ tali per cui $x \succeq_S y \succeq_S z$), del Centro (con preferenze $\succeq_C$ tali per cui $y \succeq_C x \succeq_C z$ oppure $y \succeq_C z \succeq_C x$) e di Destra (con preferenze $\succeq_D$ tali per cui $z \succeq_D y \succeq_D x$), non potrebbe comprendere individui per i quali l'alternativa di mezzo è messa al di sotto dei due estremi ($x \succeq z \succeq y$ oppure $z \succeq x \succeq y$).*

Esercizio 3.3 *Il metodo della maggioranza applicata a consessi in cui gli* *agenti hanno preferenze con un solo picco determina il problema della creazione di cicli? Tale metodo è in questo caso una regola per determinazione delle scelte sociali? Soddisfa la IIA e l'unanimità? È anche dittatoriale?*

Se fosse possibile supporre che l'assunzione di preferenze ad un solo picco regga all'atto pratico, gli elementi a favore della regola della maggioranza sarebbero convincenti. Di solito però le persone ordinano le alternative in base ad una molteplicità di criteri e quindi l'assunzione di preferenze con un solo picco non reggerebbe alla prova in molti contesti reali.

4 Funzioni di scelta

La portata del teorema di Arrow è indiscutibile: se una regola per la determinazione della scelta collettiva risponde ad alcune proprietà indubbiamente ragionevoli per quel che riguarda i sistemi di preferenza collettiva che essa determina, purtroppo tale regola si porta dietro una proprietà altrettanto spiacevole, la dittatorialità. D'altro canto, abbiamo anche osservato come sia cosa ben diversa un meccanismo in grado di fornire un sistema di preferenze collettivo sulle alternative da un meccanismo che determini esclusivamente una o più alternative preferite dalla collettività a tutte le altre disponibili. In effetti si potrebbe sperare che il pessimismo legato al risultato mostrato dal teorema di Arrow possa in qualche modo essere ridotto qualora ci si accontenti di meno (poco o molto meno dipende dal contesto), cioè non ci si curi di come la società ordini collettivamente le alternative che sono preferite da altre.
In realtà stiamo facendo di più che un semplice ridimensionamento degli obiettivi. Cercheremo di introdurre concetti utili per risolvere quei problemi in cui più individui si trovano ad integire per la scelta di una o più alternative tra quelle disponbili in un dato insieme, alternative su cui gli individui hanno dei personali sistemi di preferenze. Il problema ha un risvolto molto complesso: stiamo entrando in maniera più incisiva nell'ambito della ricerca che studia l'analisi di meccanismi per la scelta sociale, tenuto conto della realtà in cui esse vogliono essere messe in pratica e dell'interazione tra gli individui che ne può scaturire. Quest'aspetto, che nei termini appena espressi lascia molti interrogativi, sarà il tema centrale del prossimo paragrafo, dedicato ai problemi di implementazione. Quello che mostreremo in questo paragrafo, invece, è volto alla presentazione di alcuni risultati basilari proprio per l'argomento trattato nel paragrafo sulla teoria dell'implementazione. A questo scopo definiamo una *corrispondenza* [2] *per la scelta sociale* come segue:

[2]Dati due insiemi A e B, chiameremo corrispondenza $C : B \rightrightarrows A$ una legge che ad ogni elemento di B associa un sottoinsieme non vuoto di A.

Definizione 4.1 [Corrispondenza per la scelta sociale]
Sia N un insieme di n agenti e sia A un insieme di alternative. Chiamiamo $\mathcal{P}$ l'insieme dei sistemi di preferenze deboli su A. Sia $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$. Si definisce una *corrispondenza per la scelta sociale (CSS)* una corrispondenza definita come segue

$$C : \mathcal{Q}^n \rightrightarrows A$$

a valori nei sottoinsiemi di A diversi dall'insieme vuoto.

■

Una corrispondenza per la scelta sociale seleziona, dato un sistema di preferenze di n giocatori, un insieme di alternative. Se l'insieme di alternative determinato dalla corrispondenza è sempre costituito da un singolo elemento, allora possiamo parlare di *funzione per la scelta sociale (FSS)*, che definiamo come $F : \mathcal{Q}^n \to A$.
Si noti che sia le CSS che le FSS sono state definite su un insieme $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$. Questo significa che se vogliamo parlare di risultati generali, cioè di risultati validi per società i cui membri abbiano sistemi di preferenze individuali il più generale possibile (il teorema di Arrow permetteva agli individui di possedere un qualsiasi sistema di preferenze), allora Q deve avvicinarsi il più possibile a P. Per esempio, la formulazione del teorema di Gibbard-Satterthwaite che daremo alla fine di questo paragrafo, prevede che gli individui possano avere come preferenze un qualsiasi ordine totale sulle alternative, in altri termini assumiamo che le loro preferenze deboli rispettino anche la condizione di antisimmetria. Come avevamo fatto parlando delle regole per la determinazione delle scelte sociali, anche per le CSS possiamo pensare ad alcune proprietà ragionevoli. Per esempio possiamo pensare a una condizione di efficienza di una CSS (e quindi anche di una FSS se si considera tale funzione come una corrispondenza a valori in insiemi costituiti da un solo elemento):

Definizione 4.2 [Efficienza delle CSS (FSS)]
Dato un insieme N di n individui, una CSS (FSS) definita su $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ con valori sull'insieme delle alternative A si dice efficiente se

$$C((\succeq_h)_{h=1}^n) \subseteq Par((\succeq_h)_{h=1}^n) \quad \forall\ (\succeq_h)_{h=1}^n \in \mathcal{Q}^n$$

in cui $Par((\succeq_h)_{h=1}^n)$ è l'insieme degli esiti pareto efficienti in senso debole, cioè
$Par((\succeq_h)_{h=1}^n) = \{a \in A \quad t.c. \quad \text{non } \exists\ b \in A\ t.c.\ b \succ_i a \quad \forall\ i \in N\}$

■

Una CSS (FSS) che sia efficiente, quindi, non selezionerà mai un alternativa a se esiste un'alternativa b strettamente preferita ad a secondo le preferenze di ciascun giocatore.

Ancora, potremmo richiedere a una CSS (FSS) di essere *anonima*, cioè che la scelta delle alternative dipenda in ugual misura dai sistemi di preferenza di tutti gli individui, senza che venga attribuito un maggiore o minor peso alle preferenze di alcuni. Formalmente definiamo questa proprietà come segue:

Definizione 4.3 [Anonimità delle CSS (FSS)]
Dato un insieme N di n individui, una CSS (FSS) definita su $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ con valori sull'insieme delle alternative A si dice *anonima* se per ogni permutazione $\rho : N \to N$ e per ogni $(\succeq_h)_{h\in N} \in \mathcal{Q}^n$

$$C((\succeq_h)_{h\in N}) = C((\succeq_{\rho(h)})_{h\in N}) \tag{3}$$

■

Così come riteniamo ragionevole che una CSS (FSS) non debba dare peso nella scelta dell'alternativa preferita all'identità dell'individuo, possiamo ritenere altrettanto ragionevole che anche il nome delle alternative non debba influenzare la scelta. Quindi diremo che una CSS (FSS) è *neutrale* quando sia rispettata la proprietà definita di seguito:

Definizione 4.4 [Neutralità delle CSS (FSS)]
Dato un insieme N di n individui, una CSS (FSS) definita su $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ con valori sull'insieme delle alternative A si dice *neutrale* se per ogni permutazione $\sigma : A \to A$ e per ogni $(\succeq_h)_{h\in N} \in \mathcal{Q}^n$

$$\sigma\Big(C(\succeq_1, \ldots, \succeq_n)\Big) = C\Big(\succeq_1 (\sigma), \ldots, \succeq_n (\sigma)\Big) \tag{4}$$

dove $\succeq_i (\sigma)$ per ogni $i \in N$ è definita così :
$\forall\, a, b \in A \quad [\sigma(a) \;\succeq_i (\sigma)\;\; \sigma(b)] \quad \Leftrightarrow \quad [a \succeq_i b]$

■

Efficienza, anonimità e neutralità sono solo alcune delle proprietà che potremmo richiedere alle CSS (FSS). Ve ne sono altre che trattano in maniera più specifica considerazioni sul comportamento che gli individui potrebbero adottare per far sì che venga selezionata collettivamente la scelta da loro preferita. Abbiamo già visto in precedenza come in talune circostanze possano crearsi per gli individui degli incentivi a dichiarare falsi sistemi di preferenze personali. In particolare ci riferiamo a quelle situazioni (lo avevamo visto anche per le regole per la determinazione delle scelte sociali) in cui una falsa dichiarazione della struttura delle proprie preferenze sulla alternative da parte di un individuo, data la struttura del meccanismo di scelta collettiva, conduce ad una classificazione delle alternative preferite nell'ordinamento collettivo migliore per l'individuo stesso. Definiremo quindi l'assenza di possibilità di manipolazioni di questo genere come segue:

Definizione 4.5 [Non-manipolabilità delle CSS (FSS)]
Dato un insieme N di n individui, una CSS (FSS) definita su $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ con valori sull'insieme delle alternative A si dice *non-manipolabile* se

$$\forall\ (\succeq_h)_{h\in N} \in \mathcal{Q}^n,\ \forall\ i \in N,\ \forall\ \sqsupseteq_i \in \mathcal{Q}$$

$$\forall\ a \in C((\succeq_h)_{h\in N}), \forall\ b \in C(\sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}}) \qquad a\ \succeq_i\ b \tag{5}$$

dove $(\sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}})$ è il vettore di n sistemi di preferenza $(\succeq_h)_{h\in N}$ in cui $\succeq_i$ è stato sostituito da $\sqsupseteq_i$.

■

Una CSS (FSS) non manipolabile garantisce che, dato un profilo di preferenze individuale, tutte le alternative appartenenti all'insieme assunto come valore dalla CSS (FSS) in corrispondenza di quel profilo di preferenze sono preferite da ciascun individuo (secondo il proprio sistema di preferenze individuale) a ogni alternativa appartenente all'insieme assunto come valore dalla CSS (FSS) qualora un qualsiasi sistema di preferenze individuale venga sostituito all'interno del profilo di preferenze iniziale.
Tra le proprietà che avevamo già visto parlando di regole per la determinazione della scelta sociale, c'è anche la *dittatorialità* che può essere riformulata su misura delle CSS (FSS). In questo caso il dittatore non impartirà un sistema di preferenze, ma bensì una o più alternative preferite a tutte le altre.

Definizione 4.6 [Dittatorialità delle CSS (FSS)]
Dato un insieme N di n individui, una CSS (FSS) definita su $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ con valori sull'insieme delle alternative A si dice *dittatoriale* (con dittatore i) se esiste $i \in N$ tale che

$$\forall\ (\succeq_h)_{h\in N} \in \mathcal{Q}^n,\ \forall\ a \in C((\succeq_h)_{h\in N}), \qquad a \succeq_i b \qquad \forall\ b \in A \tag{6}$$

■

Potremmo anche richiedere ad una CSS (FSS) che sia a priori permessa la scelta di una o più alternative qualsiasi tra quelle disponibili, cioè che per ogni alternativa disponibile data esista un vettore di preferenze individuali tale per cui la CSS (FSS) fornisca in corrispondenza di quel vettore un insieme di alternative che contenga la data alternativa. Chiameremo tale proprietà *sovranità popolare.*

Definizione 4.7 [Sovranità popolare delle CSS (FSS)]
Dato un insieme N di n individui, una CSS (FSS) definita su $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ con valori sull'insieme delle alternative A si dice che possiede *Sovranità popolare* se

$$\forall\ a \in A\ \exists\ (\succeq_h)_{h\in N} \in \mathcal{Q}^n \quad t.c. \quad a \in C((\succeq_h)_{h\in N}) \tag{7}$$

■

Data una coppia di vettori di preferenze individuali e una CSS (FSS) che fornisce in corrispondenza del primo vettore un insieme di scelta che contiene una data alternativa a, diremo che tale CSS (FSS) è monotona se, qualora per il secondo vettore la classificazione in ciascuno ordinamento individuale di a non peggiori mentre gli ordinamenti delle altre alternative rimangono inalterati rispetto a quelli del primo, l'insieme restituito dalla CSS (FSS) in corrispondenza del secondo vettore contiene a ed è contenuto nell'insieme fornito dalla CSS in corrispondenza del primo vettore.

Definizione 4.8 [Monotonia delle CSS (FSS)]
Dato un insieme N di n individui, una CSS (FSS) definita su $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ con valori sull'insieme delle alternative A si dice *monotona* se:
$\forall\ (\succeq_h)_{h\in N}, (\sqsupseteq_h)_{h\in N} \in \mathcal{Q}^n$
$[\ a \in C((\succeq_h)_{h\in N}) \quad e \quad (\succeq_h)_{h\in N} \longrightarrow (\sqsupseteq_h)_{h\in N}$ rispetto ad a $] \quad \Rightarrow$
$[\ a \in C((\sqsupseteq_h)_{h\in N}) \quad e \quad C((\sqsupseteq_h)_{h\in N}) \subseteq C((\succeq_h)_{h\in N})\ ]$
dove $(\succeq_h)_{h\in N} \longrightarrow (\sqsupseteq_h)_{h\in N}$ rispetto ad a è definito come segue:

$$\begin{cases} \forall\ h \in N,\ \forall\ b, c \in A \setminus \{a\} & b\ \succeq_h c \Leftrightarrow b \sqsupseteq_h c \\ \forall\ h \in N,\ \forall\ b \in A \setminus \{a\} & a\ \succeq_h b \Rightarrow a \sqsupseteq_h b \end{cases} \tag{8}$$

■

Esercizio 4.1 *Sia N l'insieme di n individui e $A = \{0, 1\}$ l'insieme delle possibili alternative. Sia inoltre $F : \{0, 1\}^n \to A$ una FSS, dove, nel dominio della FSS, indichiamo con 0 la relazione di preferenza tra le due alternative in A tale che $0 \succ 1$ mentre indichiamo con 1 la relazione di preferenza tra le due alternative in A tale che $1 \succ 0$. Provare che:*

1. *F è neutrale $\Leftrightarrow$ $F(e - x) = 1 - F(x) \quad \forall x \in \{0, 1\}^n$;*
2. *F è anonima $\Leftrightarrow$ $\exists \quad f : \{0, 1, \ldots, n\} \to \{0, 1\}$ tale che $\forall\ x \quad \Big(F(x) = f(\sum_{i=1}^n x_i)\Big)$;*
3. *F è efficiente $\Leftrightarrow$ $\Big(F(0, 0, \ldots, 0) = 0,\ F(e) = 1\Big)$;*
4. *F è monotona $\Leftrightarrow \forall\ x, y \in \{0, 1\}^n$ tale che $[x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)]$.*

Esistono delle relazioni tra le proprietà che abbiamo appena definito. Ne mostriamo alcune di seguito:

Proposizione 4.1 *Siano dati un insieme N di n individui e un insieme A di $p \geq 3$ alternative. Sia inoltre F la FSS definita come $F : \mathcal{H}^n \to A$, dove $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}$ è l'insieme di tutti gli ordini totali su A. Se F è non-manipolabile allora F è anche monotona.*
Dim.
Si considerino due n-uple di sistemi di preferenze $(\succeq_h)_{h\in N}$, $(\sqsupseteq_h)_{h\in N} \in \mathcal{H}^n$ tali che $(\succeq_h)_{h\in N} \longrightarrow (\sqsupseteq_h)_{h\in N}$ rispetto ad a, $a \in A$. Si supponga inoltre che $(\sqsupseteq_h)_{h\in N}$ sia diverso da $(\succeq_h)_{h\in N}$ per un numero $t \leq n$ di sistemi di

preferenze individuali e che $F((\succeq_h)_{h\in N}) = a$.
Si consideri l' n-upla $\Big(\sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}}\Big)$ *tale per cui* $\sqsupseteq_i$ *differisce da* $\succeq_i$ *per la classificazione di a rispetto le altre alternative (ovviamente continuando a verificare la condizione* $(\succeq_h)_{h\in N} \longrightarrow (\sqsupseteq_h)_{h\in N}$*).*
Supponiamo che $F\Big(\sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}}\Big) = b$, $b \in A \setminus \{a\}$. *Per come è definita la non-manipolabilità su F si avrà:*
$a \ \succeq_l \ F\Big(\sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}}\Big) \quad \forall\, l \in N.$
Inoltre, poichè $(\succeq_h)_{h\in N} \longrightarrow \Big(\sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}}\Big)$ *rispetto ad a, si avrà che* $a \succeq_i c \Rightarrow a \sqsupseteq_i c \ \forall c \in A \setminus \{a\}$, *(e quindi anche per* $c = b$*).*
D'altra parte, sempre per la non-manipolabilità di F, si avrà anche che:
$F\Big(\sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}}\Big) \ \succeq_l \ a, \quad \forall\, l \in N \setminus \{i\}$ *e*
$F\Big(\sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}}\Big) \ \sqsupseteq_i \ a.$
Poichè le preferenze degli individui sono ordini totali, cioè sono preordini totali che rispettano anche la condizione di antisimmetria, per cui non esistono alternative diverse tra loro che siano anche tra loro indifferenti, affinchè la non-manipolabilità rimanga soddisfatta deve essere $F\Big(\sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}}\Big) = a$ *(o uguale ad* $\{a\}$ *se si vuole considerare una FSS come una CSS a valori in insiemi costituiti da un solo elemento), da cui si ottiene la contraddizione e rimane dimostrato che se* $(\succeq_h)_{h\in N} \longrightarrow \Big(\sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}}\Big)$ *rispetto ad a allora* $F\Big(\sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}}\Big) = a$.
Sostituendo ora all'n-upla $\Big(\sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}}\Big)$ *un altro sistema di preferenza individuale diverso in* $(\sqsupseteq_h)_{h\in N}$ *che non sia quello sostituito in precerenza* $(\sqsupseteq_i)$*, si ottiene una nuova n-upla, diciamo* $\Big(\sqsupseteq_i, \sqsupseteq_j, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i,j\}}\Big)$.
Procedendo con il ragionamento per assurdo utilizzato nel passo precedente, questa volta tra le n-uple $\Big(\sqsupseteq_i, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i\}}\Big)$, $\Big(\sqsupseteq_i, \sqsupseteq_j, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i,j\}}\Big)$, *si ottiene* $F\Big(\sqsupseteq_i, \sqsupseteq_j, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{i,j\}}\Big) = a$.
Ripetendo quindi i passaggi sopra descritti un numero t di volte, giungendo cioè a ricostruire passo dopo passo l'intero profilo $(\sqsupseteq_h)_{h\in N}$*, si ottiene:*
$F\Big((\sqsupseteq_h)_{h\in N}\Big) = a$, *che soddisfa la condizione di monotonia.* ■

Proposizione 4.2 *Siano dati un insieme N di n individui e un insieme A di* $p \geq 3$ *alternative. Sia inoltre F la FSS definita come* $F : \mathcal{H}^n \to A$, *dove* $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}$ *è l'insieme di tutti gli ordini totali su A. Se F è non-manipolabile e soddisfa la sovranità popolare, allora F è anche pareto efficiente.*
Dim.
Si consideri l'n-upla di ordini totali $(\succeq_h)_{h\in N} \in \mathcal{H}^n$ *tale che* $F((\succeq_h)_{h\in N}) = a$, $a \in A$.
Poichè F rispetta la sovranità popolare, allora esiste una n-upla di siste-

mi di preferenze costituito da un ordine totale $(\sqsupseteq_h)_{h\in N} \in \mathcal{H}^n$ *tale che* $F((\sqsupseteq_h)_{h\in N}) = b$, $b \in A \setminus \{a\}$.
Si supponga che esista $i \in N$ *per il quale* $b \succ_i a$.
Ma d'altro canto, per la non-manipolabilità applicata n *volte,*
$F\Big((\succeq_h)_{h\in N}\Big) \ \succeq_i \ F\Big(\ \sqsupseteq_{j\in N\setminus\{i\}}, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{j\}}\Big) \ \succeq_i$
$\succeq_i \ F\Big(\ \sqsupseteq_{j\in N\setminus\{i\}}, \sqsupseteq_{k\in N\setminus\{i,j\}}, (\succeq_h)_{h\in N\setminus\{j,k\}}\Big) \ \succeq_i \ \ldots \ \succeq_i \ F\Big((\sqsupseteq_h)_{h\in N}\Big) = b$
che produce una contraddizione con l'ipotesi per cui $b \succ_i a$*, dato che la relazione di preferenza degli individui è antisimmetrica e* $b \neq a$.
■

Le precedenti proposizioni sono rilevanti per la dimostrazione del seguente risultato, analogo, per certi versi, a quello di Arrow:

Teorema 4.1 (Gibbard-Sattherthwaite 1973) *Siano dati un insieme* N *di* n *individui e un insieme* A *di* $p \geq 3$ *alternative. Sia inoltre* F *la FSS definita come* $F : \mathcal{H}^n \to A$*, dove* $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}$ *è l'insieme di tutti gli ordini totali su* A*, avente le seguenti due proprietà:*

1. *Sovranità popolare;*
2. *Non-manipolabilità.*

Allora F *è dittatoriale.*

Del precedente teorema non presentiamo la dimostrazione nei termini espressi dall'enunciato, ma ci limitiamo ad'illustrarne un esempio nel caso di due giocatori e di tre alternative.

Esempio 4.1 *Si consideri una situazione in cui* $N = \{1, 2\}$ *e* $A = \{a, b, c\}$ *ed una FSS che chiamiamo* F*, non-manipolabile e che soddisfi la sovranità popolare. Per provare il teorema in questa situazione mostriamo che c'è un dittatore.*
Consideriamo un profilo di preferenze in cui entrambi gli individui considerano le alternative a *e* b *migliori di* c*, seppure con classificazioni ordinali differenti. In particolare si supponga il vettore di sistemi di preferenze strette* $\Pi = \Big((a \succ_1 b \succ_1 c), (b \succ_1 a \succ_1 c)\Big)$.
Per la proposizione 4.2, F *deve essere anche Pareto efficiente, il che significa che* $F(\Pi) \neq c$.
Si assuma che $F(\Pi) = a$*. Allora, se consideriamo il vettore di sistemi di preferenze strette* $\Pi' = \Big((a \succ_1 b \succ_1 c), (b \succ_1 c \succ_1 a)\Big)$*, in questo caso deve essere di nuovo* $F(\Pi') = a$*. La ragione è che ancora una volta, sempre per la Pareto efficienza, non può essere* $F(\Pi') = c$*, ma nemmeno può essere, per la non-manipolabilità,* $F(\Pi') = b$.

Si noti che in Π' la miglior alternativa per 1 *è* a *mentre per l'individuo* 2 a *è la peggiore alternativa possibile. Nonostante ciò, abbiamo visto che, in tale vettore* Π'*,* F *assume valore uguale ad* a*. Poichè per la proposizione 4.1* F *è anche monotona, ne segue che* F *assume come valore* a *ogni volta che il giocatore* 1 *pone tale alternativa in cima alle sue preferenze. Dato che il ragionamento seguito è simmetrico per tutte le alternative, ne risulta che il giocatore* 1 *è un dittatore.*

5 Problema dell'implementazione

Per illustrare la natura di un problema di implementazione, consideriamo un "pianificatore" che desidera assegnare un oggetto ad uno solo tra due individui. Si supponga che il pianificatore desideri assegnare l'oggetto all'individuo che valuta di più l'oggetto in questione (si pensi ad esempio ai meccanismi su cui sono basate le aste) ma egli non sa quale dei due sia.
Il suo problema è allora ideare un meccanismo per il quale, tenuto conto delle possibili preferenze degli individui e delle intensità con cui esse sono espresse, l'oggetto sia dato all'individuo che lo valuta di più.
Il problema è, nella maggior parte dei casi, di difficile (talvolta impossibile) soluzione.
Si assume quindi che esista un pianificatore in grado di definire le regole di interazione tra gli individui e che gli individui, quando si confrontino con queste regole, le assumano alla lettera, beninteso che il pianificatore possa determinare le regole dell'interazione ma non le preferenze e le azioni degli individui.
Tutti questi aspetti trovano una collocazione ottimale in quella che è la formalizzazione standard della Teoria dei Giochi non cooperativi. Anzi, la toeria dell'implementazione è una parte ben precisa della Teoria dei Giochi. Non vogliamo però in questa sede aprire una parentesi troppo vasta per essere trattata in maniera esauriente in poche righe. Rimandiamo per chi volesse approfondire questo argomento al libro di Osborne e Rubinstein.
Ciò che vorremmo fare in questo capitolo è dare un'idea di cosa si propone di fare la teoria dell'implementazione sfruttando unicamente i risultati sin qui mostrati, che sono a loro volta strettamente connessi alla teoria dell'implementazione vera propria, quella, per intenderci, che utilizza il linguaggio formale della Teoria dei Giochi.
La storia biblica del Giudizio di Salomone illustra alcune delle idee principali della teoria dell'implementazione.

Esempio 5.1 (Il Giudizio di Salomone) *Due donne,* 1 *e* 2*, reclamano entrambe un neonato. Ognuna di esse sa chi è la vera madre, ma nessuna può dimostrare di essere la vera madre.*
Salomone prova a dedurre la verità minacciando di tagliare in due il neonato, contando sul fatto che la falsa madre preferisca questo risultato a quello che

la madre vera ottenga il bambino mentre la vera madre preferisca dar via il bambino piuttosto che vederlo fatto a pezzi. Salomone può decidere di dare il bambino ad una delle madri oppure ordinare di tagliarlo in due.
Formalmente sia l'insieme delle alternative $A = \{a, b, c\}$: a è l'alternativa nella quale il bambino è dato alla donna 1, b quella in cui il bambino è dato alla donna 2 e c l'alternativa in cui il bambino è tagliato in due. Due profili di preferenze sono possibili:

θ *(1 è la vera madre):* $a \succ_1 b \succ_1 c$ *e* $b \succ_2 c \succ_2 a$
θ' *(2 è la vera madre):* $a \succ_1 c \succ_1 b$ *e* $b \succ_2 a \succ_2 c$

Che meccanismo può ideare Salomone per riuscire a scoprire chi è la vera madre a cui dare il bambino?

Lasceremo questa domanda senza una risposta definitiva. Si noti soltanto che la FSS tale per cui $F(\theta) = a$ e $F(\theta') = b$ difficilmente darà i risultati sperati da Salomone. Infatti, tale FSS non è monotona: $a = F(\theta)$ e $a \neq F(\theta')$ ma non c'è alternativa $y \in A \setminus \{a\}$ e donna $i \in \{1, 2\}$ tale che $a \succeq_i y$ e $y \succ_i a$. Per la proposizione 4.1, F è quindi manipolabile. Questo significa che le donne possono trarre beneficio dalla falsa dichiarazione delle proprie preferenze e Salomone, senza qualche ulteriore specificazione, non è in grado di conoscere le vere preferenze delle due donne e di decidere quindi quale delle due sia la vera madre a cui restituire il figlio.

Esercizio 5.1 *Nella storia biblica Salomone riesce ad assegnare il bambino alla vera madre: egli lo consegna all'unica donna che dichiara di preferire che il bambino venga dato all'altra donna piuttosto che venga tagliato in due. Provare a dare una giustificazione plausibile del perchè le cose andarono in quel modo.*

Bibliografia essenziale:

- Blair D. H., Pollak R. A. (1982) *Scelte collettive razionali* - Modelli Matematici - Le Scienze quderni:**81**.
- Osborne J., Rubinstein A. (1994) *Course in Game Theory*
- Patrone F. (1983) *Seminario di economia matematica* - Dipartimento di Matematica dell' Università di Pavia - Appunti del seminario di economia matematica 1982/83.
- Tijs F. (1983) *Sociale Keuze Theorie* - Mathematisch Instituut Katholieke Universiteit Nijmegen - Dispense in lingua Olandese.