1 Equilibri evolutivamente stabili

Consideriamo un gioco a due persone in forma strategica, simmetrico. Vale a dire, (X, Y, f, g), con $X = Y$ e con $f(x, y) = g(y, x)$. La definizione è stata data in questo modo in modo da rendere l'idea che i due giocatori fronteggiano esattamente la stessa situazione. Esempio di gioco simmetrico è il "dilemma del prigioniero":

$I \backslash II$	C	D
C	$2, 2$	$0, 3$
D	$3, 0$	$1, 1$

Se per dilemma del prigioniero si intende il gioco:

$I \backslash II$	L	R
T	$2, 2$	$0, 3$
B	$3, 0$	$1, 1$

esso, in termini formali, non è simmetrico, visto che $X = \{T, B\} \neq Y = \{L, R\}$. E' però ovvio che si può estendere opportunamente la definizione: si può richiedere che esista Z ed una corrispondenza biunivoca ϕ fra X e Z, ed una corrispondenza biunivoca ψ fra Y e Z, per cui $f(\phi(x), \psi(y)) = g(\psi(y), \phi(x))$. Basta quindi, nel caso particolare, prendere $Z = \{C, D\}$, con $\phi(T) = C$ e $\phi(B) = D$ e con $\psi(L) = C$ e $\psi(R) = D$. Volendo, si può semplificare, utilizzando una sola corrispondenza biunivoca fra X ed Y, ma la definizione "allargata" qui data è la più "naturale".

Si dimostra facilmente che in un gioco simmetrico, se $(\bar{x}, \bar{y})$ è un equilibrio di Nash, lo è anche $(\bar{y}, \bar{x})$. Ma non c'è alcuna garanzia che un gioco simmetrico abbia per forza un equilibrio simmetrico. Basta modificare in modo adeguato il dilemma del prigioniero:

$I \backslash II$	C	D
C	$2, 2$	$1, 3$
D	$3, 1$	$0, 0$

Questo gioco ha due equilibri di Nash, ma nessuno dei due è simmetrico.

Per giochi simmetrici si dà la definizione di ESS. C'è dietro una interpretazione dei payoff come fitness di un individuo. Si immagina che gli individui siano estratti a sorte da una popolazione e che la strategia da loro usata sia geneticamente determinata.

Si vuole vedere se una data strategia $x^* \in X$ soddisfa una opportuna condizione di "stabilità", che vorrebbe tradurre l'idea che è una strategia resistente rispetto ad altre strategie che "compaiano" fra quelle usate dagli individui nella popolazione, giocate da una piccola frazione di individui nella popolazione (strategie "mutanti"). L'idea è che il payoff atteso da un "mutante", presente nella popolazione in una frazione pari a ε, e che giochi la strategia x sia espresso dalla formula:

$$(1-\varepsilon)f(x,x^*)+\varepsilon f(x,x)$$

e la ragione è ovvia, visto che si assume che il mutante incontri un altro mutante con probabilità ε e invece un non mutante con probabilità $1-\varepsilon$. Invece, un non mutante ha un payoff pari a:

$$(1-\varepsilon)f(x^*,x^*)+\varepsilon f(x^*,x)$$

Quindi, (x^*,x^*) viene detto ESS se, per ogni $x \in X$ diverso da x^*, esiste $\bar{\varepsilon} > 0$ tale che la relazione seguente valga per ogni $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$:

$$(1-\varepsilon)f(x,x^*)+\varepsilon f(x,x) < (1-\varepsilon)f(x^*,x^*)+\varepsilon f(x^*,x) \tag{1}$$

Grazie al teorema di permanenza del segno si prova che $x^* \in X$ è un ESS se, per ogni $x \in X, x \neq x^*$, si ha:

$$f(x^*,x^*) \geq f(x,x^*) \quad \text{oppure} \tag{2}$$

$$f(x,x^*) = f(x^*,x^*), \quad \text{nel qual caso deve essere} \quad f(x^*,x) > f(x,x) \tag{3}$$

Dimostrazione

• Se x^* soddisfa la condizione (1), basta passare al limite per $\varepsilon \to 0$ per ottenere la (2); la condizione (3) è del tutto ovvia (basta dividere per ε ciò che resta di entrambi i membri dopo avere eliminato i due addendi uguali).

• Per il viceversa, supponiamo di avere (2). Se $f(x^*,x^*) > f(x,x^*)$, ancora il teorema di permanenza del segno ci dice che vale la (1). Se invece $f(x^*,x^*) = f(x,x^*)$, come sopra la validità di (1) è ovvia (basta moltiplicare per ε che è un numero positivo i due membri della disuguaglianza che abbiamo in (3) e poi aggiungere i due addendi uguali). Q.E.D.

Naturalmente un caso particolare in cui x^* è un ESS è quello in cui x^* è un cosiddetto equilibrio di Nash *stretto*, cioè quando valga:

$$f(x^*,x^*) > f(x,x^*) \quad \text{per ogni} \quad x \neq x^*$$

Valgono i seguenti due risultati:

Teorema 1 *Se lo spazio delle strategie X contiene solo due elementi, esiste sempre un ESS. Inoltre:*
x^* è ESS $\Rightarrow$ x^* è un attrattore asintotico per la dinamica del replicatore.

Teorema 2 *Qualunque sia lo spazio delle strategie X (finito), si ha:*
x^* *è ESS* $\Rightarrow$ x^* *è un attrattore asintotico per la dinamica del replicatore* $\Rightarrow$ x^* *è un equilibrio di Nash* $\Rightarrow$ x^* *è un punto stazionario per la dinamica del replicatore.*