Esercizio 1 Dato il gioco $(\{1, 2, 3\}, v)$ con v funzione caratteristica tale che:
$v(\emptyset) = v(1) = v(2) = 0$, $v(3) = 1$;
$v(1, 2) = 9$, $v(2, 3) = 5$, $v(1, 3) = 6$, $v(1, 2, 3) = 12$
Trovarne il nucleo, rappresentandolo graficamente.

Soluzione
Consideriamo il simplesso in $\mathbb{R}^3$ di vertici $(12, 0, 0), (0, 12, 0), (0, 0, 12)$. Questo triangolo lo rappresentiamo nel piano, nella figura di sotto. Si noti che questo triangolo rappresenta le pre-imputazioni che hanno tutte le coordinate maggiori od uguali a zero. Se si avesse $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, questo triangolo rappresenterebbe l'insieme delle imputazioni. Se, invece, come succede in questo caso, così non è, bisogna tenere conto esplicitamente delle condizioni di razionalità individuale: vedasi la linea $x_3 \geq v(3) = 1$ rappresentata in figura. Per non appesantire troppo il disegno, non sono invece rappresentate in figura le condizioni $x_1 \geq v(1) = 0$ e $x_2 \geq v(2) = 0$, che individuano due linee coincidenti coi lati del triangolo.

Le freccette sono usate per mettere in evidenza il verso delle disequazioni che interessa.

Il nucleo è l'area tratteggiata, che corrisponde ai punti del triangolo soddisfacenti tutte le disequazioni. Si noti che il valore Shapley di questo gioco, che è $(28/6, 25/6, 19/6)$, non appartiene al nucleo (la sua terza coordinata, ϕ_3, non soddisfa la condizione $\phi_3 \leq 3$ che, di fatto, equivale a dire che non è soddisfatta la condizione $\phi_1 + \phi_2 \geq v(1, 2)$: infatti $v(123) - \phi_3 = \phi_1 + \phi_2$ e $v(12) = v(123) - 3$).

Il nucleo può anche essere determinato analiticamente. La definizione ci dice che stanno nel nulcleo tutte e sole le allocazioni che soddisfano le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} x_i \geq v(i) & \forall i \in \{1, 2, 3\} \\ x_1 + x_2 \geq v(12) \\ x_1 + x_3 \geq v(13) \\ x_2 + x_3 \geq v(23) \\ x_1 + x_2 + x_3 = v(123) \end{cases}$$

Nel nostro caso particolare abbiamo:

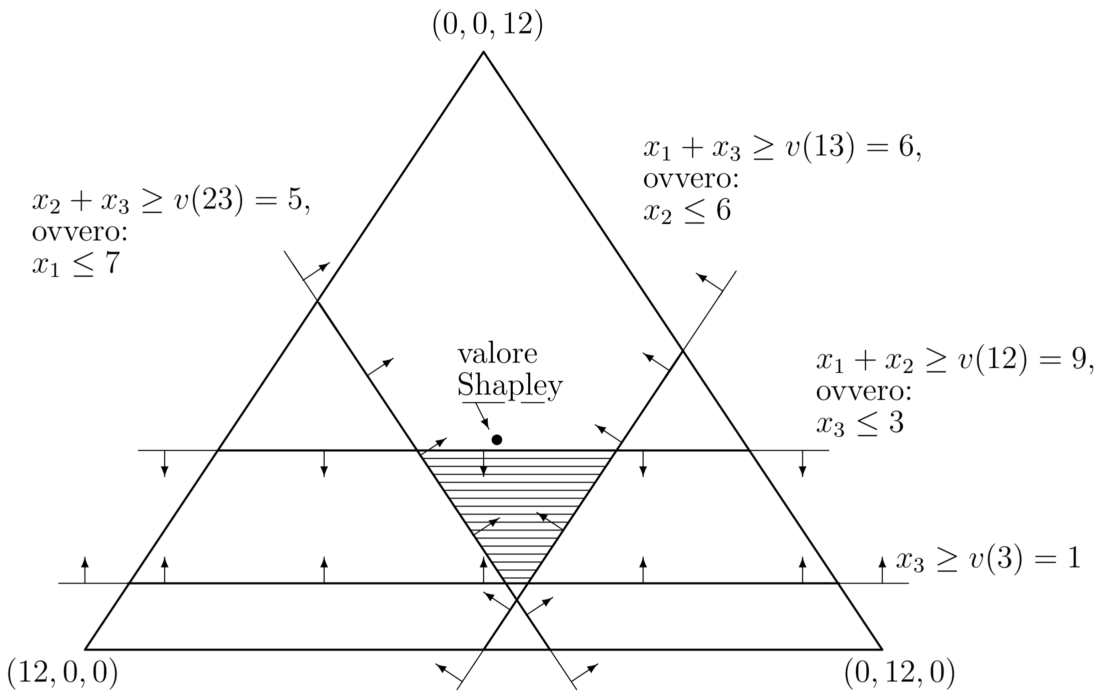

Figura 1: Disegnare il nucleo nel simplesso $(12, 0, 0), (0, 12, 0), (0, 0, 12)$

$$\begin{cases} x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + x_3 \geq 5 \\ x_2 + x_3 \geq 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 12 \end{cases}$$

Tenendo conto del fatto che $x_1 + x_2 + x_3 = 12$, possiamo sostituire $12 - x_3$ ad $x_1 + x_2$, ed analogamente per gli altri due casi, in modo da ottenere:

$$\begin{cases} x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ 12 - x_3 \geq 9 \\ 12 - x_2 \geq 5 \\ 12 - x_3 \geq 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 12 \end{cases}$$

E quindi:

$$\begin{cases} x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_3 \leq 9 \\ x_2 \leq 5 \\ x_3 \leq 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 12 \end{cases}$$

E' proprio questo il sistema di disequazioni che abbiamo rappresentato in figura.