1 Spazi metrici e preordini continui

Sia E un insieme. Una funzione $d : E \times E \to \mathbb{R}$ viene detta *metrica* su E se soddisfa le seguenti condizioni:

- $d(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in E \times E$
- $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $(x, y) \in E \times E$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ per ogni $x, y, z \in E$ [disuguaglianza triangolare]

Esempi di metriche sono:

- su $\mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$
- su $\mathbb{R}^n$, $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$
- su un qualsiasi $A \subseteq \mathbb{R}^n$, la restrizione di d ad $A \times A$ è ancora una metrica
- se d è una metrica su E, per un qualsiasi $A \subseteq E$ la restrizione di d ad $A \times A$ è una metrica, su A
- dato un qualsiasi insieme E, si può definire su E la *metrica discreta*, così: $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$, 0 se $x = y$

La coppia ordinata (E, d), in cui E è un insieme e d è una metrica su E, viene detta spazio metrico. Qualora sia chiaro dal contesto quale è la metrica cui ci si riferisce, si omette il riferimento alla metrica. Quindi diremo magari "sia E uno spazio metrico", anche se questo è un modo improprio di esprimersi.

Sia E uno spazio metrico. Un sottoinsieme T di E si dice *denso* in E se:

$$\forall x \in E,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists t \in T \text{ t.c. } d(x, t) < \varepsilon$$

Esempio 1 $\mathbb{Q}$ *è denso in* $\mathbb{R}$.

Definizione 1 *Uno spazio metrico si dice separabile se ha un sottoinsieme denso finito o numerabile*

Esempio 2 *Poiché* $\mathbb{Q}$ *è denso in* $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{Q}$ *è numerabile, abbiamo che* $\mathbb{R}$ *è uno spazio metrico separabile (con la metrica solita, s'intende).*

Osservazione 1 *Ogni spazio metrico finito o numerabile è separabile. Naturalmente basta prendere $T = E$.*

Dati (E_1, d_1) e (E_2, d_2), entrambi spazi metrici, ed $f : E_1 \to E_2$, diciamo che la funzione f è continua in $x^* \in E_1$ se:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in E_1 \ \ (d_1(x, x^*) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(x^*)) < \varepsilon)$$

Se ho una successione x_n in uno spazio metrico (E, d), dico che x_n converge ad $x^* \in E$ (e indichiamo questo col simbolo $x_n \longrightarrow x^*$, o anche con $x_n \xrightarrow{d} x^*$ se vogliamo mettere in rilievo quale è la metrica per cui si ha la convergenza) se:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \nu > 0 \text{ t.c. } \forall n \in \mathbb{N} \ \ (n > \nu \Rightarrow d(x_n, x^*) < \varepsilon)$$

Osservazione 2 *Rispetto alla metrica discreta, una successione converge ad x^* se e solo se i suoi termini da un certo indice in poi coincidono con x^*.*

Si può dimostrare il seguente teorema (Caratterizzazione della continuità mediante successioni):

Teorema 1 *Siano (E_1, d_1) e (E_2, d_2) spazi metrici. Sia $f : E_1 \to E_2$, e sia $x^* \in E_1$. Allora le due seguenti condizioni sono equivalenti:*
- f è continua in x^*
- per ogni successione $x_n \xrightarrow{d_1} x^*$, si ha che $f(x_n) \xrightarrow{d_2} f(x^*)$

Sia (E, d) uno spazio metrico. Sia $\sqsupseteq$ un preordine totale su E.
Dico che $\sqsupseteq$ è *continuo* se valgono le due seguenti proprietà:
- per ogni successione $x_n \xrightarrow{d_1} x^*$, se $x_n \sqsupseteq \bar{x}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $x^* \sqsupseteq \bar{x}$
- per ogni successione $x_n \xrightarrow{d_1} x^*$, se $x_n \sqsubseteq \bar{x}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $x^* \sqsubseteq \bar{x}$

Esempio 3 *L'ordine lessicografico su $\mathbb{R}^2$ non è continuo. Basta considerare $x_n = (6 + 1/n, 3)$, $\bar{x} = (6, 5)$. Si ha che $x_n \geq_L \bar{x}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, $x_n \longrightarrow x^* = (6, 3)$. Ma si ha $(6, 3) <_L (6, 5)$. La Figura 1 illustra questo esempio.*

Si può dimostrare il seguente teorema:

Teorema 2 *Sia (E, d) uno spazio metrico. Sia $\sqsupseteq$ un preordine totale su E. Supponiamo che $\sqsupseteq$ sia continuo e che E sia separabile.*
Allora esiste $u : E \to \mathbb{R}$ continua *che rappresenta $\sqsupseteq$.*

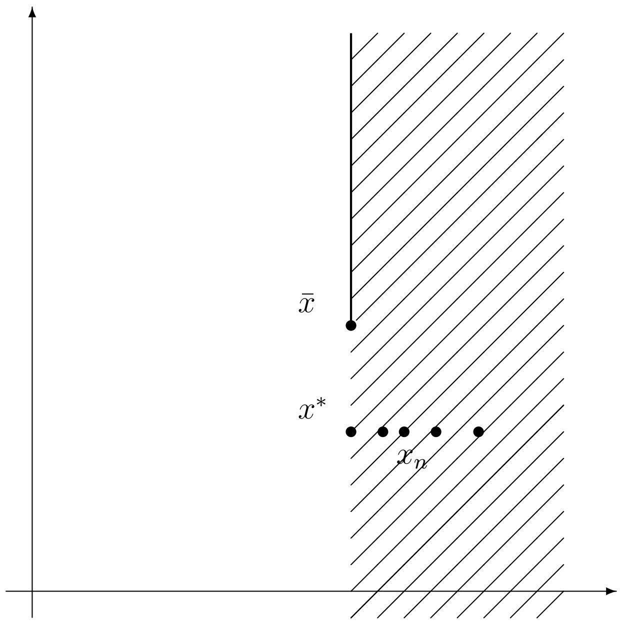

Figura 1: L'ordine lessicografico non è continuo

2 Le stesse idee in ambiente topologico

Sia E uno spazio topologico, con topologia τ. Come esprimere la compatibilità tra τ e un preordine totale $\sqsupseteq$ definito su E? La relazione $\sqsupseteq$ individua in modo naturale dei sottoinsiemi di E, così come una topologia mette in evidenza sottoinsiemi particolari di E (gli aperti, o i chiusi). Sembra opportuno provare a seguire questa intuizione per esprimere la compatibilità.

Sia $\bar{x} \in E$. L'insieme $\{x \in E : x \sqsupseteq \bar{x}\} \subseteq E$ è individuato soltanto dalla relazione $\sqsupseteq$, la topologia non c'entra nulla. Ci potremmo però aspettare che per ogni $\bar{x} \in E$ sia un sottoinsieme chiuso, ed analogamente possiamo chiedere che sia chiuso anche $\{x \in E : x \sqsubseteq \bar{x}\} \subseteq E$. Diremo che $\sqsupseteq$ è *continuo* se queste condizioni sono soddisfatte. In questo modo il nostro preordine totale può essere rappresentato da una funzione continua? No, occorrono altre condizioni: la continuità di $\sqsupseteq$ è solo necessaria.

Ci vuole poco per convincersi che sia una condizione necessaria affinchè il preordine totale possa essere rappresentato da una funzione continua. Sia E uno spazio topologico, $\sqsupseteq$ su E e $u : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua che rappresenta $\sqsupseteq$. Allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ gli insiemi $u^{-1}([t, +\infty))$ e $u^{-1}((-\infty, t])$

sono sottoinsiemi chiusi di E (controimmagine di chiusi di $\mathbb{R}$). In particolare ciò è vero se $t \in u(E)$, cioè se esiste un $\bar{x} \in E$ tale che $u(\bar{x}) = t$. In questo caso l'insieme $\{x \in E : x \sqsupseteq \bar{x}\} = \{x \in E : u(x) \geq u(\bar{x})\} = u^{-1}([t, +\infty))$ è un chiuso di E (vedi Figura 2, dove $u^{-1}([t, +\infty))$ è evidenziato con un tratteggio verticale).

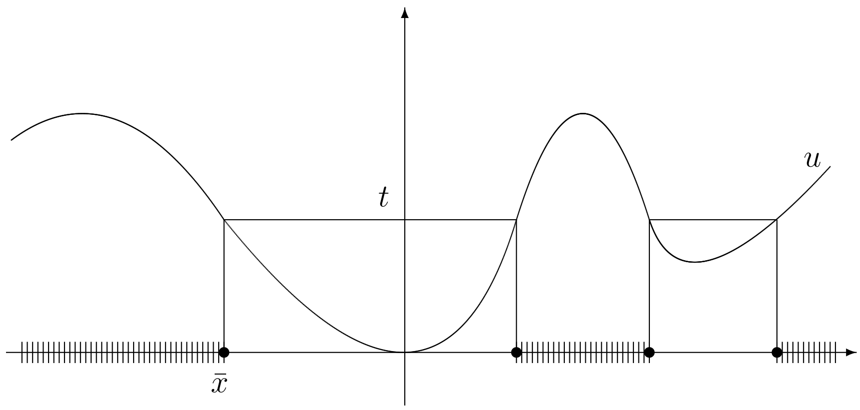

Figura 2: Un esempio di "sopralivelli"

Analogamente è chiuso l'insieme: $\{x \in E : x \sqsubseteq \bar{x}\} = \{x \in E : u(x) \leq u(\bar{x})\} = u^{-1}((-\infty, t])$.

Osservazione 3 *Notiamo come ciascuna delle due condizioni unilaterali è associata in realtà ad una condizione di semicontinuità (superiore od inferiore) per u.*

Abbiamo quindi individuato condizioni necessarie affinché il preordine sia rappresentato da una funzione continua. Come detto, tali condizioni non sono sufficienti. Si dimostra il seguente risultato:

Teorema 3 *Sia E uno spazio topologico 2-numerabile e sia $\sqsupseteq$ un preordine totale su E continuo rispetto alla struttura topologica (cioè $\forall\, \bar{x} \in E$ gli insiemi $\{x \in E : x \sqsupseteq \bar{x}\}$ e $\{x \in E : x \sqsubseteq \bar{x}\}$ sono chiusi). Allora esiste $u : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continua che rappresenta $\sqsupseteq$.*

Ricordiamo che 2-numerabile significa avere una base di aperti numerabile. Se uno spazio è 2-numerabile ogni suo sottoinsieme è 2-numerabile rispetto alla topologia indotta. Visto che $\mathbb{R}^n$ è 2-numerabile il risultato si applica in particolare a $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

Osservo che uno spazio topologico 2-numerabile è anche separabile (cioè ammette un sottoinsieme denso e numerabile). In generale il viceversa non vale (vale però se E è uno spazio metrico).

Nota: il fatto che il preordine sia rappresentato da una funzione continua non vieta che possa anche essere rappresentato da una funzione discontinua.

Il problema del decisore è quello di trovare un elemento che sia preferito a tutti gli altri, cioè trovare un $\bar{x} \in E$ tale che $x \sqsubseteq \bar{x}\ \forall x \in E$.

Esempio 4 *Caso particolarmente importante è quello della "domanda del consumatore". Si presume che il consumatore abbia preferenze $\sqsupseteq$ su $\mathbb{R}^n_{\geq} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } x_i \geq 0 \text{ per ogni } i\}$. Egli sceglie il "paniere di beni" preferito tra tutti quelli che soddisfano il suo "vincolo di bilancio" $B(p, w)$. Qui p è un "sistema di prezzi", ovvero[1] un elemento di $\mathbb{R}^n$. Per evitare complicazioni supponiamo che tutte le coordinate di p_i siano non negative. Il costo di un paniere di beni $x \in \mathbb{R}^n_{\geq}$ è dato da $p \cdot x = \sum_{i=1}^n p_i x_i$. Il numero reale w ci dice quale è la "ricchezza iniziale" del nostro consumatore, che pertanto[2] potrà permettersi di acquistare ogni paniere di beni x che soddisfa la condizione $p \cdot x \leq w$. Quindi, in termini formali: $B(p, w) = \{x \in \mathbb{R}^n_{\geq} \text{ t.c. } p \cdot x \leq w\}$. Se supponiamo che sia $w \geq 0$ e che tutte le coordinate di p siano positive (strettamente, intendo!), allora $B(x, p)$ è un compatto.*

Se u è una funzione di utilità che descrive le preferenze del decisore, possiamo riformulare il suo problema come quello di trovare un punto di massimo per la funzione u, cioè trovare $\bar{x} \in E$ t.c. $u(\bar{x}) \geq u(x)\ \forall x \in E$. Il teorema di Weierstrass garantisce, quantomeno sotto certe condizioni, l'esistenza di tale punto.

Teorema 4 (Weierstrass) *Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua allora f ha un massimo e un minimo assoluti su $[a, b]$.*

Naturalmente questa versione "elementare" non ci basta.

Rilettura del teorema di Weierstrass (formulazione topologica). Siano E, Y spazi topologici e $f : E \longrightarrow Y$ continua. Se E è compatto allora $f(E) \subseteq Y$ è compatto.

---

[1] In realtà è un elemento del duale, ma essendo in dimensione finita possiamo "sorvolare" su questo aspetto...

[2] Per il matematico quadratico medio: stiamo sottintendendo che il consumatore si trovi di fronte ad un mercato perfettamente concorrenziale.

Nel caso particolare in cui $Y = \mathbb{R}$, abbiamo che $f(E)$ è un compatto di[3] $\mathbb{R}$ e, quindi, ha massimo. Quindi f ha massimo su E.

Spesso il teorema di Weierstrass viene applicato a un sottoinsieme dell'insieme di definizione di f. Se $K \subseteq E$ è compatto allora $f(K) \subseteq Y$ è compatto.

Sia allora dato $(E, \sqsupseteq)$ dove E è uno spazio topologico, e sia data $u : E \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione continua che rappresenta $\sqsupseteq$. Se E è compatto, allora esiste un $\bar{x} \in E$ tale che $u(\bar{x}) \geq u(x)\ \forall x \in E$ (per il teorema di Weierstrass).

Parrebbe sembrare che, senza la 2-numerabilità, non si possa garantire che ci sia l'elemento preferito per un preordine continuo su un compatto (perché non è detto che ci sia una funzione di utilità).

Invece, si può dimostrare:

Teorema 5 *Sia dato $(E, \sqsupseteq)$, dove E è uno spazio topologico e $\sqsupseteq$ è un preordine totale su E che soddisfa le condizioni di compatibilità (il preordine è "continuo"). Se E è compatto allora esiste $y \in E$ tale che $y \sqsupseteq x\ \forall x \in E$*

Dimostrazione

Sia $\hat{x} \in E$ e sia $C_{\hat{x}} = \{x \in E\, :\, x \sqsupseteq \hat{x}\}$.

Per ipotesi (il preordine è continuo) la famiglia $\mathcal{C}$ costituita dai $C_{\hat{x}}$ è una famiglia di chiusi non vuoti ($\hat{x} \in C_{\hat{x}}$).

$\mathcal{C}$ ha la proprietà dell'intersezione finita (cioè preso un numero finito di elementi di $\mathcal{C}$ la loro intersezione è non vuota). Per provare questa asserzione, basta notare che $\sqsupseteq$ è un preordine *totale* e quindi, presa una sottofamiglia finita $\mathcal{C}_F = \{C_{\hat{x}_i}\, :\, i = 1, \ldots, n\}$, tra gli $\hat{x}_i$ c'è un $\hat{x}_k$ che è il "migliore" di tutti: $\hat{x}_k \sqsupseteq \hat{x}_i$ per $i = 1, ..., n$. Naturalmente, $\hat{x}_k \in \bigcap C_{\hat{x}_i}$.

Ma allora la compattezza ci garantisce che $\bigcap_{\hat{x} \in E} C_{\hat{x}} \neq \emptyset$.

Sia quindi $y \in \bigcap_{\hat{x} \in E} C_{\hat{x}}$. Allora $y \in C_{\hat{x}}\ \forall \hat{x} \in E$ e quindi $y \sqsupseteq \hat{x}\ \forall \hat{x} \in E$.

QED

Ricordo la definizione classica di compatto: uno spazio topologico E si dice *compatto* se da ogni suo ricoprimento aperto si può estrarre un sottoricoprimento finito. Un *ricoprimento aperto* è una famiglia di di sottoinsiemi aperti di E tale che l'unione di tutti questi sottoinsiemi contiene E.

Una proprietà equivalente alla compattezza è la proprietà della *intersezione finita* che abbiamo usato nella dimostrazione. L'equivalenza è di dimostrazione immediata (basta "passare ai complementari").

[3] Ricordo che $K \subseteq E$ è compatto se K è un compatto con la topologia di sottospazio.

Osservo ancora (in riferimento alla Osservazione 3) che in realtà è sufficiente avere un preordine totale "semicontinuo superiormente" (così come, del resto, accade per il teorema di Weierstrass).