Teoria dei Giochi

Corso di laurea specialistica:
Decisioni economiche, impresa e responsabilità sociale, A.A. 2004/05
Soluzioni degli esercizi del 24 febbraio 2005

Esercizio 1 Dato il gioco $(\{1,2,3\}, v)$ con v funzione caratteristica tale che:

$v(\emptyset) = v(1) = v(2) = 0$, $v(3) = 1$;
$v(1,2) = 9$, $v(2,3) = 5$, $v(1,3) = 6$, $v(1,2,3) = 12$

Calcolare il valore Shapley del gioco $(\{1,2,3\}, v)$ e dire se sta ne nucleo.

Soluzione
Costruiamo la tabella seguente, dove nella prima colonna mettiamo le varie permutazioni possibili dei tre giocatori, mentre nella colonna intestata con i mettiamo i guadagni marginali attribuiti al giocatore i nelle varie permutazioni possibili. Le due ultime righe contengono le somme dei guadagni marginali e poi tali valori divisi per 6 (ovverossia 3!), vale a dire il valore Shapley.

permutazione	1	2	3
123	0	9	3
132	0	6	6
213	9	0	3
231	7	0	5
312	5	6	1
321	7	4	1
totale	28	25	19
valore Shapley	28/6	25/6	19/6

Si può osservare che $\phi_1(v) + \phi_2(v) = 28/6 + 25/6 = 53/6 < 54/6 = 9 = v(\{1,2\})$ e quindi il valore Shapley non sta nel nucleo.

Esercizio 2 Si consideri il gioco $(\{1,2,3\}, w)$ con w funzione caratteristica tale che:

$w(\emptyset) = 0$, $w(1) = 2$, $w(2) = 3$, $w(3) = 1$;
$w(1,2) = 5$, $w(2,3) = 4$, $w(1,3) = 3$, $w(1,2,3) = 6$

Trovare i giocatori dummy del gioco $(\{1,2,3\}, w)$.
Sfruttare la proprietà del dummy player e quella di additività riferite al valore Shapley per calcolare il valore Shapley del gioco $(\{1,2,3\}, v+w)$.

Soluzione
La verifica che ogni giocatore è un "dummy player" è banale, anche se noiosa (per ogni giocatore i, e per ogni coalizione S che non contenga i, abbiamo $w(S \cup \{i\}) = w(S) + w(\{i\})$).
Ne segue che $\phi_i(w) = w(i)$. E quindi $\phi_1(w) = 2, \phi_2(w) = 3, \phi_3(w) = 1$.
La proprietà di additività del valore Shapley ci permette di trovare immediatamente il valore Shapley per $v + w$ ed è:

$$\phi_1(v+w) = 2 + 28/6, \quad \phi_2(v+w) = 3 + 25/6, \quad \phi_3(v+w) = 1 + 19/6$$

Esercizio 3 Quando il valore Shapley di un gioco coincide con $v(i)$ per ogni giocatore i?

Soluzione
Ricordo che un TU-game si dice additivo se $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$ per ogni coppia di coalizioni disgiunte. Se un gioco è additivo, per applicazione ripetuta della condizione sopra riportata, si ha che $v(S) = \sum_{i \in S} v(i)$.

E' immediato verificare che, se un gioco è additivo, allora il valore Shapley coincide con $v(i)$ per ogni giocatore i. Ciò è conseguenza immediata del fatto che, in un gioco additivo, ogni giocatore è "dummy".

Il viceversa non è vero, nel senso che esistono giochi non additivi per cui il valore Shapley vale $v(i)$ per ogni i. Basta considerare v così definito: $v(\emptyset) = v(i) = v(123) = 0$ e $v(ij) = 1$.

Si noti che questo gioco non è superadditivo. In effetti, per i giochi superadditivi, dal fatto che $\Phi_i(v) = v(i)$ per ogni i segue che il gioco è additivo. La dimostrazione di questo fatto è semplice: intanto osserviamo che la condizione $\Phi_i(v) = v(i)$ per ogni i implica che $v(N) = \sum_{i \in N} v(i)$. Se il gioco non fosse additivo, vi sarebbe una coalizione T per la quale non è vero che $v(T) = \sum_{i \in T} v(i)$. Per la superadditività deve essere $v(T) \geq \sum_{i \in T} v(i)$, quindi se non vale l'uguale può essere vero solo $v(T) > \sum_{i \in T} v(i)$. Ma allora $v(N) \geq v(T) + \sum_{i \in N \setminus T} v(i) > \sum_{i \in T} v(i) + \sum_{i \in N \setminus T} v(i) = v(N)$, il che è impossibile (la prima disuguaglianza segue dalla superadditività).

Lascio a chi ne abbia voglia esaminare a fondo la questione al di fuori dei giochi superadditivi (intendo dire, individuare la classe dei giochi per cui $\Phi_i(v) = v(i)$ per ogni giocatore i).

Esercizio 4 Le quote di una società sono distribuite come segue: un azionista ha il 20% delle azioni, mentre ogni altro azionista ha solo una azione. Si calcoli il valore Shapley del gioco ad utilità trasferibile semplice ottenuto assegnando valore 1 alla coalizione S se i suoi giocatori hanno il 50% delle azioni "+1", e zero altrimenti, per i casi di 10, 100 e 1000 azioni.
Si commenti.

Soluzione
Possiamo utilizzare la formula che dà il valore Shapley (s è il numero di elementi di S ed n è il numero totale dei giocatori):

$$\Phi_i(v) = \sum_{S\subseteq N,\ i\in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[v(S) - v(S\setminus\{i\}]$$

Nel caso di un gioco "semplice", la formula si semplifica e diventa:

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \text{ vince},\ S\setminus\{i\} \text{ perde}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \tag{1}$$

Vediamo cosa avviene se abbiamo un gioco di maggioranza semplice, con un numero di giocatori n dispari (il caso n pari si tratta in modo simile), ciascuno dei quali abbia un voto. Abbiamo allora $n = 2m + 1$ per un opportuno numero naturale m e la maggioranza è $m + 1$. Quindi, ogni coalizione S con almeno $m + 1$ elementi è vincente. Sono interessanti quelle con esattamente $m + 1$ elementi perché quelle sono vincenti, ma se se ne va via un giocatore diventano perdenti.

Per calcolare il valore Shapley non abbiamo bisogno di alcuna formula, in quanto per simmetria esso sarà pari ad $1/n$ per ogni giocatore. Tuttavia, userò la formula per "allenamento" per risolvere poi l'esercizio assegnato. Se vogliamo trovare il valore Shapley, ad esempio, per il giocatore 1, la formula ci chiede di scoprire quante sono le coalizioni che:
- sono vincenti
- contengono 1
- sono perdenti se 1 "va via" (detto più correttamente: $S\setminus\{1\}$ è perdente)

Si vede facilmente che queste sono esattamente le coalizioni che contengono 1 ed altri m elementi dell'insieme $\{2, 3, \ldots, n\} = \{2, 3, \ldots, 2m + 1\}$. Vale a dire, sono tante quante i sottoinsiemi che contengono m elementi di un insieme di $2m$ elementi.

Ricordo che in generale il numero di sottoinsiemi contenenti k elementi di un insieme di n elementi è dato da $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Quindi, le coalizioni che ci interessano sono $\binom{2m}{m} = \frac{2m!}{m!m!}$. Pertanto, usando la formula (1), con $s = m+1$ e $n = 2m+1$:

$$\Phi_i(v) = \frac{2m!}{m!m!} \frac{(m+1-1)!(2m+1-(m+1))!}{(2m+1)!} = \frac{2m!}{m!m!} \frac{m!m!}{(2m+1)!}$$

Si noti che nel caso che stiamo trattando tutti gli addendi di (1) sono uguali, per cui ci è bastato moltiplicare $\frac{m!m!}{(2m+1)!}$ per il numero degli addendi che è pari a $\frac{2m!}{m!m!}$.

Naturalmente, nella formula che abbiamo trovato si semplifica quasi tutto e otteniamo $\frac{1}{2m+1} = \frac{1}{n}$.

Passiamo ora al caso di 10 azioni. Abbiamo 9 giocatori, 8 con una azione ciascuno e uno con 2 azioni (supponiamo che costui sia il giocatore 9).

Calcoliamo il valore Shapley per il giocatore 1 (che sarà uguale, per simmetria, a quello di tutti i primi 8 giocatori). Quando il giocatore 1 è essenziale in una coalizione S? In due casi:
A)- S è una coalizione con 6 giocatori dell'insieme $\{1, \dots, 8\}$ ed S contiene 1, quindi queste coalizioni sono tante quante le coalizioni di 5 giocatori presi dall'insieme $\{2, \dots, 8\}$.
B)- S è una coalizione con 5 giocatori tra cui il giocatore 9. Queste coalizioni sono tante quante le coalizioni di 4 giocatori dell'insieme $\{1, \dots, 8\}$ contenenti 1, quindi queste coalizioni sono tante quante le coalizioni di 3 giocatori presi dall'insieme $\{2, \dots, 8\}$.
Il numero di tali coalizioni è:
A)- $\binom{7}{5} = \frac{7!}{2!5!}$
B)- $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!}$
Allora il valore Shapley è dato da (il primo addendo riguarda il caso A) ed il secondo il caso B)):

$$\frac{7!}{2!5!} \frac{(6-1)!(9-6)!}{9!} + \frac{7!}{3!4!} \frac{(5-1)!(9-5)!}{9!} = \frac{7!}{2!5!} \frac{5!3!}{9!} + \frac{7!}{3!4!} \frac{4!4!}{9!} = \frac{1}{24} + \frac{1}{18} = \frac{7}{72}$$

Ovviamente potremmo usare il fatto che il valore Shapley è una pre-imputazione per trovare il valore per il giocatore 9. Ma vediamo anche qui l'uso della formula.

Quando il giocatore 9 è essenziale in una coalizione S? In due casi:
C)- S è una coalizione con 7 azioni, precisamente con 6 giocatori tra cui il giocatore 9, quindi queste coalizioni sono tante quante le coalizioni di 5 giocatori presi dall'insieme $\{1, \dots, 8\}$.
D)- S è una coalizione con 6 azioni, precisamente con 5 giocatori tra cui il giocatore 9. Queste coalizioni sono tante quante le coalizioni di 4 giocatori dell'insieme $\{1, \dots, 8\}$.

Il numero di tali coalizioni è:
C)- $\binom{8}{5} = \frac{8!}{3!5!}$
D)- $\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!}$
Allora il valore Shapley è dato da (il primo addendo riguarda il caso C) ed il secondo il caso D)):

$$\frac{8!}{3!5!}\frac{(6-1)!(9-6)!}{9!}+\frac{8!}{4!4!}\frac{(5-1)!(9-5)!}{9!} = \frac{8!}{3!5!}\frac{5!3!}{9!}+\frac{8!}{4!4!}\frac{4!4!}{9!} = \frac{1}{9}+\frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

Si può verificare, come segnale che forse non si sono sbagliati i conti, che la somma dei valori Shapley fa proprio $v(N)$, cioè 1:

$$\frac{7}{72}\cdot 8 + \frac{2}{9} = \frac{56+16}{72} = 1$$

Il caso di 100 e 1000 azioni si tratta in modo perfettamente analogo. Vediamo cosa otteniamo come valore Shapley, nel caso di 100 azioni, per il possessore di 20 azioni.

Le coalizioni interessanti sono quelle con:
- 31 giocatori possessori di una azione, più lui
- 32 giocatori possessori di una azione, più lui
- ...
- 50 giocatori possessori di una azione, più lui

Sono tutte coalizioni che sono vincenti e diventano perdenti se lui se ne va via. Le formulette stavolta diventano (si noti che il numero totale di giocatori è 81):

$$\binom{80}{31}\frac{(32-1)!(81-32)!}{81!}+\cdots+\binom{80}{50}\frac{(51-1)!(81-51)!}{81!} =$$

$$= \frac{(80)!(80-31)!}{31!}\frac{(31)!(81-32)!}{81!}+\cdots+\frac{(80)!(80-50)!}{50!}\frac{(50)!(81-51)!}{81!} =$$

$$= \frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{81} = \frac{20}{81}$$

Analogamente, per il caso di 1000 azioni, si otterrà: $\frac{200}{801}$.

Il valore Shapley per i "piccoli azionisti" lo si può ricavare usando il fatto che il valore Shapley è una pre-imputazione.

Esercizio 5 Il proprietario di una casa vuole venderla perché tenerla è per lui inutile.
Ci sono due potenziali clienti: uno valuta la casa $a > 0$ ed il secondo $b \geq a$.
Si modellizzi questo problema come un gioco ad utilità trasferibile e si determinino il suo nucleo e il valore Shapley.

Soluzione

Alla situazione data possiamo associare un TU-game definito nel modo seguente: $v(\emptyset) = v(i) = 0$, $v(12) = a$, $v(13) = b$, $v(23) = 0$, $v(123) = b$.

Le imputazioni sono date dall'insieme delle $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tali che $x_1 + x_2 + x_3 = b$. Il nucleo è dato da quelle imputazioni che soddisfano altresì le condizioni:

$x_1 + x_2 \geq v(\{1, 2\}) = a$

$x_1 + x_3 \geq v(\{1, 3\}) = b$

$x_2 + x_3 \geq v(\{2, 3\}) = 0$

La seconda condizione ci dice che al giocatore 2 non toccherà niente. E pertanto b viene spartito tra 1 e 3 (ma 3 non può avere più di $b - a$). Più precisamente, il nucleo è dato da:

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_2 = 0, \quad 0 \leq x_3 \leq b - a, \quad x_1 = b - x_3\}$$

Per quanto riguarda il valore Shapley, lo possiamo calcolare usando la stessa tabella già usata per la soluzione del primo esercizio:

permutazione	1	2	3
123	0	a	$b - a$
132	0	0	b
213	a	0	$b - a$
231	b	0	0
312	b	0	0
321	b	0	0
totale	$3b + a$	a	$3b - 2a$
valore Shapley	$b/2 + a/6$	$a/6$	$b/2 - a/3$
valore Shapley	$\frac{1}{2}(b - a) + \frac{4}{6}a$	$\frac{1}{6}a$	$\frac{1}{2}(b - a) + \frac{1}{6}a$

Ho scritto in due forme diverse il valore Shapley (i valori sono gli stessi!), perché il secondo modo mette in maggior evidenza come venga spartito fra i giocatori il surplus che possono ottenere dalla contrattazione.

Caso particolare è $b = a$. In questo caso, il nucleo si riduce ad un'unica imputazione, che assegna interamente al giocatore 1 i guadagni derivanti dalla cooperazione (si può "leggere" questo risultato come un effetto della concorrenza che vi è tra i giocatori 2 e 3: sul lato domanda c'è appunto concorrenza, mentre sul lato offerta no).

Per $b = a$ il valore Shapley (lo si legge bene dall'ultima riga della tabella) assegna $4/6$ del guadagno ad 1 mentre 2 e 3 si spartiscono quel che resta.

Anche qui, il giocatore 1 rimane privilegiato, ma in modo meno "estremistico" di come prefigura invece il nucleo.

Vediamo una rappresentazione grafica del nucleo. Nella figura 1, il triangolo disegnato rappresenta l'insieme delle imputazioni.

Sono rappresentate nel disegno le tre disuguaglianze relative alle coalizioni di due giocatori. Viene messo in evidenza, nel disegno, il fatto che per una imputazione le disuguaglianze seguenti:

$x_1 + x_2 \geq v(\{1, 2\}) = a$
$x_1 + x_3 \geq v(\{1, 3\}) = b$
$x_2 + x_3 \geq v(\{2, 3\}) = 0$

sono equivalenti alle seguenti (semplicemente, si sfrutta il fatto che $x_1 + x_2 + x_3 = b$):

$x_3 \leq b - a$
$x_2 \leq 0$
$x_1 \leq b$

Il nucleo è la porzione calcata di uno dei lati.

In figura è indicato anche il valore Shapley, che non sta dentro al nucleo.

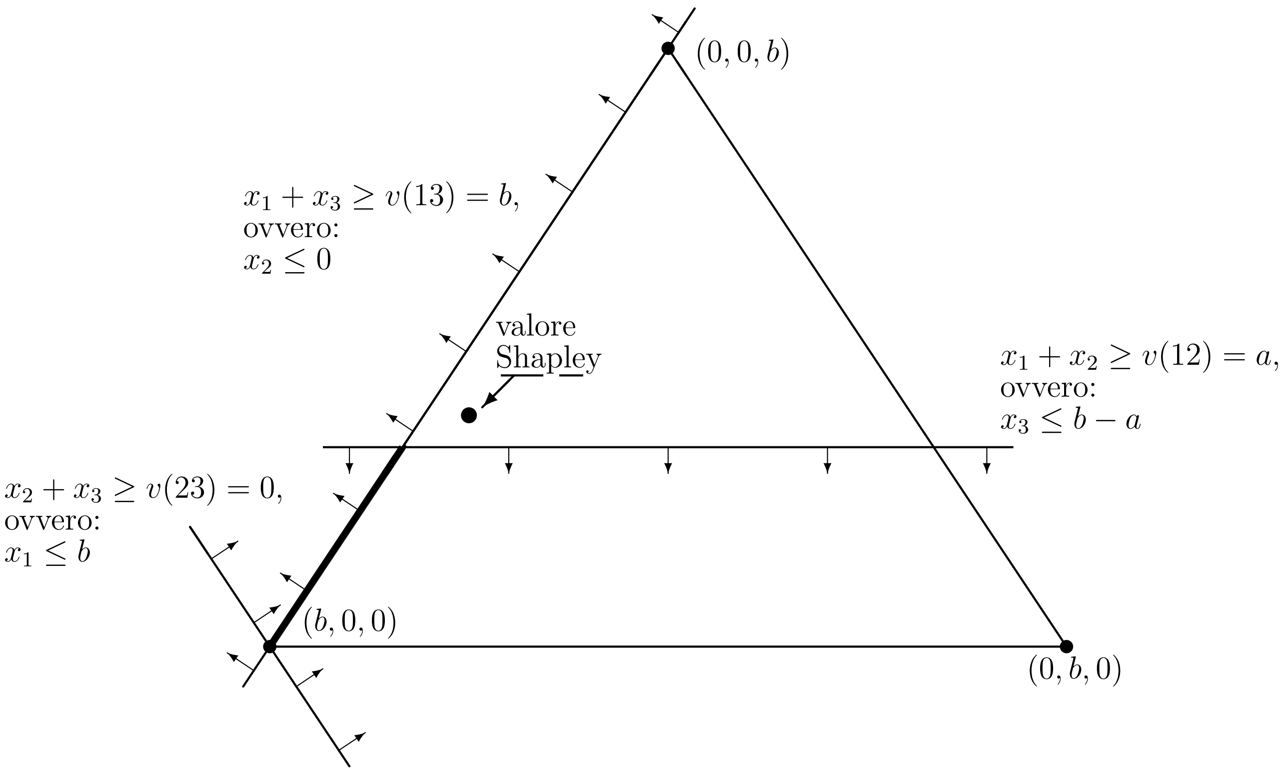

Figura 1: Il nucleo e il valore Shapley del gioco della vendita della casa.