Teoria dei Giochi

Corso di laurea specialistica:
Decisioni economiche, impresa e responsabilità sociale, A.A. 2004/05
Soluzioni degli esercizi del 17 febbraio 2005

Esercizio 1 Si consideri il gioco (a due giocatori) descritto dalla tabella seguente:

$I \backslash II$	L	C	R
T	$(4,1)$	$(3,3)$	$(1,4)$
B	$(1,4)$	$(3,3)$	$(4,1)$

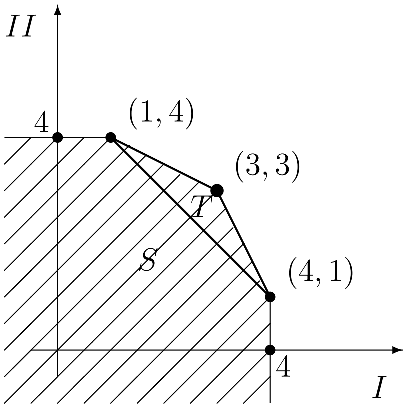
a) Che payoff ottengono i giocatori se giocano la coppia di strategie miste $((1/2, 1/2), (1/3, 1/3, 1/3))$?
b) Disegnare l'insieme dei payoff ottenibili mediante strategie correlate.
c) Si supponga che il "disagreement point" sia $(0, 0)$. Simmetria ed efficienza sono sufficienti per determinare la soluzione di Nash del problema di contrattazione? Essa coincide con quella di Kalai e Smorodinski?

Soluzione
a) Con le strategie indicate, ognuna delle caselle della matrice ha probabilità 1/6 di "uscire" e quindi il payoff atteso per i due giocatori è (uguale per entrambi e) pari a:

$$\frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{16}{6}$$

$$\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{16}{6}$$

b) L'insieme dei payoff ottenibili mediante strategie correlate è l'involucro convesso di $\{(1, 4), (3, 3), (4, 1)\}$, cioè $\mathrm{co}(\{(1, 4), (3, 3), (4, 1)\})$. Si tratta del triangolo T di vertici $(1, 4)$,$(3, 3)$,$(4, 1)$ disegnato in figura.



c) Per quanto riguarda l'insieme di contrattazione, notiamo che T non contiene il disagreement point indicato. Ovvero, $(T, d) \notin \mathcal{B}$. Se però ammettiamo che vi sia "free disposal", possiamo ritenere che l'insieme delle possibilità di contrattazione sia S, il "comprehensive hull" di T, ovvero l'insieme $T - \mathbb{R}^2_{\geq}$. Si tratta dell'insieme tratteggiato in figura. Se così è, la soluzione di Nash è (per simmetria ed efficienza) il punto $(3, 3)$, che rappresenta anche la soluzione di Kalai e Smorodinski dello stesso problema.

Esercizio 2 Supponiamo che due giocatori debbano spartirsi 100 euro. Ammettiamo che tutte le suddivisioni siano accettabili, compresa l'opzione di lasciare (parte) dei soldi sul tavolo.
Supponiamo che $u_I(t) = t$ e che $u_{II}(t) = 3t$.
Supponiamo infine che il "disagreement point" sia $(0, 0)$.

Quale è la soluzione di Nash del problema di contrattazione? E quale è la soluzione di Kalai e Smorodinski?

Soluzione
La soluzione è molto semplice da trovare, in quanto l'insieme di contrattazione che otteniamo, cioè l'insieme S che è disegnato nella figura 1 a sinistra, può essere trasformato in un insieme simmetrico: l'insieme S' disegnato a destra nella figura 1, con una coppia di trasformazioni affini strettamente crescenti. Questa coppia di trasformazioni semplicemente mappa un punto di coordinate (x, y) in un punto $(3x, y)$, ed evidentemente trasforma il disagreement point $d = (0, 0)$ in $d' = (0, 0)$. Otteniamo quindi un problema di contrattazione simmetrico la cui soluzione (sia nel senso di Nash che di Kalai e Smorodinski) è individuata da simmetria ed efficienza ed è il punto $(150, 150)$. Allora, la soluzione del problema dato è $(50, 150)$. Si noti che questi sono valori delle funzioni di utilità. Se ci interessa sapere la spartizione in termini monetari, essa sarà "fifty-fifty".

Esercizio 3 Supponiamo che due giocatori debbano spartirsi 100 euro. Ammettiamo che tutte le suddivisioni $(x, 100 - x)$ siano accettabili, per $0 \leq x \leq$

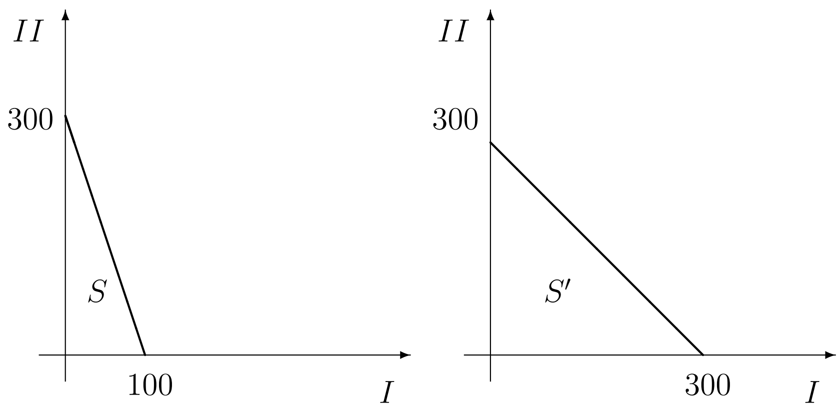


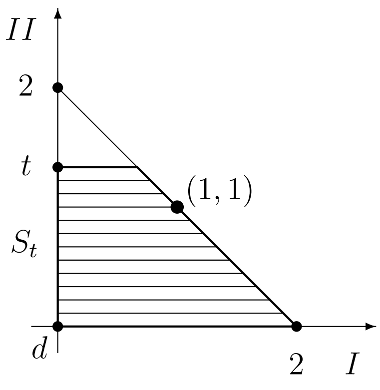
Figura 1: Due insiemi di contrattazione, legati da una trasformazione affine strettamente crescente.

100.
Supponiamo che $u_I(t) = t$ e che $u_{II}(t) = \sqrt{t}$.
Supponiamo infine che il "disagreement point" sia $(0, 0)$.

Quale è la soluzione di Nash del problema di contrattazione?

Soluzione
Possiamo calcolare la soluzione di questo problema mediante massimizzazione del "prodotto di Nash", ma si noti che l'insieme delle possibilità di contrattazione, come indicato nel testo dell'esercizio NON è un insieme convesso. Quindi la teoria di Nash non *giustifica* l'uso di questa formula.

Esercizio 4 Si trovi la soluzione di Nash e di Kalai e Smorodinski per ogni problema di contrattazione (S_t, d), dove $d = (0, 0)$ e dove l'insieme di contrattazione S_t è descritto in figura (per $0 \leq t \leq 2$).



Soluzione

Per la soluzione di Nash, per $t = 2$ la soluzione è ovviamente $(1, 1)$ (al solito, grazie a simmetria ed efficienza). Grazie alla indipendenza dalle alternative irrilevanti, essa resta soluzione finché appartiene all'insieme S_t, cioè per $t \geq 1$. Invece, per $t < 1$ possiamo fare i calcoli massimizzando il prodotto di Nash. Si verifica facilmente che la soluzione di questo problema di massimo si trova sempre nel "vertice" $(2 - t, t)$.

Per quanto riguarda Kalai e Smorodinski, occorre trovare lo "utopia point" che è $(2, t)$. Applicando la regola troviamo che la soluzione di Kalai e Smorodinski è $(2 - t/2, t/2)$.