Teoria dei Giochi

Corso di laurea specialistica:
Decisioni economiche, impresa e responsabilità sociale, A.A. 2004/05
Soluzioni degli esercizi del 3 febbraio 2005

Esercizio 1 Diciamo che un gioco (a due giocatori) $G = (X, Y, f, g)$ è *simmetrico* se $X = Y$ e $f(x, y) = g(y, x)$ per ogni $x, y \in X$.
a) Si provi che, in un gioco simmetrico, se $(\bar{x}, \bar{y})$ è un equilibrio di Nash, allora $(\bar{y}, \bar{x})$ è anch'esso un equilibrio.
b) E' vero che in un gioco simmetrico tutti gli equilibri sono del tipo $(\bar{x}, \bar{x})$?
c) E' vero che in un gioco simmetrico c'è sempre un equilibrio del tipo $(\bar{x}, \bar{x})$?
d) I giochi classici come il "dilemma del prigioniero" e la "battaglia dei sessi" sono descritti da me con una tabella nella quale le strategie per I sono T, B e per II sono invece L, R. In altre parole, non abbiamo che $X = Y$. Tuttavia, sembra ragionevole considerare simmetrici anche questi giochi. Riconsiderare la definizione data ed adattarla convenientemente in modo da "coprire" anche questi casi. E' il caso di criticare la definizione data?

Soluzione
parte a)
Se $(\bar{x}, \bar{y})$ è un equilibrio di Nash, si ha (si ricordi che $X = Y$):

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \qquad \text{per ogni } x \in X \tag{1}$$

$$g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \qquad \text{per ogni } y \in X \tag{2}$$

Ma allora:

$$g(\bar{y}, \bar{x}) = f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) = g(\bar{y}, x) \qquad \text{per ogni } x \in X \tag{3}$$

Ma:

$$g(\bar{y}, \bar{x}) \geq g(\bar{y}, x) \qquad \text{per ogni } x \in X \tag{4}$$

è proprio la seconda condizione (cioè quella relativa al giocatore II) che viene richiesta affinché $(\bar{y}, \bar{x})$ sia un equilibrio di Nash. Si noti che essa è perfettamente equivalente a:

$$g(\bar{y}, \bar{x}) \geq g(\bar{y}, y) \qquad \text{per ogni } y \in X \tag{5}$$

Allo stesso modo si ottiene che $(\bar{y}, \bar{x})$ soddisfa anche la prima condizione dell'equilibrio di Nash.
parte b)
No. Basta considerare:

I \ II	A	B
A	$(0,0)$	$(0,0)$
B	$(0,0)$	$(0,0)$

Un esempio meno banale è offerto dalla “battaglia dei sessi” (tenendo conto di quanto verrà detto al punto d)).
parte c)

No. Tanto per cominciare, un gioco simmetrico può non avere equilibri. Ad esempio, il “pari o dispari” (che NON ha equilibri. Ovviamente la sua estensione mista sì). Comunque, anche se ha equilibri, non è detto che ne abbia di simmetrici, come mostra il gioco “chicken” (anche qui, non mi sto riferendo alla sua estensione mista):

I \ II	A	B
A	$(3,3)$	$(2,4)$
B	$(4,2)$	$(1,1)$

parte d)

Dato un gioco (X, Y, f, g), lo potremmo chiamare “essenzialmente simmetrico” se $\exists Z$, $\phi : Z \to X$, $\psi : Z \to Y$, corrispondenze biunivoche, tali che, posto $\tilde{f}(s,t) = f(\phi(s), \psi(t))$ e $\tilde{g}(s,t) = g(\phi(s), \psi(t))$, il gioco $(Z, Z, \tilde{f}, \tilde{g})$ è un gioco simmetrico. L’idea è quindi che l’apparente mancanza di simmetria derivi solo dalla assegnazione delle “etichette” alle strategie dei giocatori.

Vediamo, per esempio, come la “battaglia dei sessi” sia un gioco essenzialmente simmetrico. Basta prendere $Z = \{H, K\}$ e definire $\phi(H) = T, \phi(K) = B, \psi(H) = R, \psi(K) = L$. Così, trasformiamo la “battaglia dei sessi” rappresentata qui sotto a sinistra, nel gioco di destra che soddisfa la definizione formale di gioco simmetrico:

I \ II	L	R
T	$2,1$	$0,0$
B	$0,0$	$1,2$

I \ II	H	K
H	$0,0$	$2,1$
K	$1,2$	$0,0$

Si può facilmente verificare come: $\tilde{f}(H,H) = f(\phi(H), \psi(H)) = f(T,R) = 0$, $\tilde{f}(H,K) = f(\phi(H), \psi(K)) = f(T,L) = 2$, etc. Analogamente per i payoff di II, ad esempio: $\tilde{g}(K,H) = g(\phi(K), \psi(H)) = g(B,R) = 2$. Si noti che $\tilde{f}(H,K) = \tilde{g}(K,H)$, come richiede la condizione di simmetria. In effetti, si può agevolmente verificare come il gioco $(Z, Z, \tilde{f}, \tilde{g})$ sia un gioco simmetrico.

Un altro esempio è dato dal dilemma del prigioniero, dato nella tabella a sinistra. Qui basta proprio solo “ridenominare” le strategie di II (usare T al posto di L e B al posto di R) e si ottiene il gioco di destra che soddisfa la condizione di simmetria.

I \ II	L	R
T	$3,3$	$1,4$
B	$4,1$	$2,2$

I \ II	T	B
T	$3,3$	$1,4$
B	$4,1$	$2,2$

Per altro verso, anche il gioco sotto a sinistra (che ovviamente è la battaglia dei sessi) è simmetrico, pur di definire $Z = \{H, K\}$ e definire $\phi(H) = H, \phi(K) = K, \psi(H) = K, \psi(K) = H$: vedasi la tabella di destra.

I \ II	H	K
H	$2,1$	$0,0$
K	$0,0$	$1,2$

I \ II	H	K
H	$0,0$	$2,1$
K	$1,2$	$0,0$

Critiche e commenti sono lasciati a voi.

Esercizio 2 Nell'esercizio 2 del "foglio" datato 20 gennaio 2005, si può essere indotti a ritenere che una diminuzione dei payoff possa portare addirittura ad un esito migliore per i giocatori.

D'altro canto, le funzioni di utilità di von Neumann-Morgenstern sono definite a meno di trasformazioni lineari strettamente crescenti. Ciò potrebbe indurre a ritenere che l'affermazione precedente non sia significativa. E' una obiezione fondata o no? Occorre fare qualche ulteriore precisazione?

Soluzione

Che una diminuzione dei payoff possa portare a un esito (di *equilibrio*) migliore per i giocatori è mostrato dall'esercizio menzionato nel testo.

L'obiezione chiede di precisare il *valore interpretativo* di questa osservazione. Se siamo di fronte a due situazioni diverse di gioco, l'osservazione fatta sulle trasformazioni lineari dei payoff può essere pertinente. Se invece i payoff scaturiscono dalla *stessa* funzione di utilità che viene applicata ad esiti diversi, come accade nell'esempio (di game form) qui illustrato:

I \ II	L	R
T	a	b
B	c	d

I \ II	L	R
T	e	f
B	g	g

in cui i nostri decisori preferiscono l'esito a ad e, così come d ad e, etc., allora possiamo effettivamente affermare che l'esito prevedibile della situazione di sinistra è preferito all'esito prevedibile che si ha nella situazione di destra.

Esercizio 3 Nel seguente gioco ad informazione incompleta (descritto in modo incompleto ...) quanti tipi esistono per i giocatori I e II? Assegnare dei belief coerenti ai giocatori e verificare se esistono equilibri in strategie pure. Descrivere inoltre il gioco in forma estesa ottenuto mediante la trasformazione di Harsanyi.

I \ II	L	R
T	$(2,1)$	$(0,0)$
B	$(0,0)$	$(1,2)$

I \ II	L	R
T	$(1,2)$	$(0,0)$
B	$(0,0)$	$(2,1)$

Soluzione

Vi sono tre modi diversi di vedere la situazione data come gioco ad informazione incompleta, ciascuno dei quali rappresenta una lettura plausibile dei dati disponibili.

Un modo presuppone un tipo per I e due tipi per II ($II.1$ e $II.2$). Possiamo allora ritenere che $u(T, L, I.1, II.1) = 2$ e $u(T, L, I.1, II.2) = 1$, etc. Naturalmente i belief di I possono essere qualsiasi (ogni $p \in [0,1]$ può rappresentare la probabilità che l'unico tipo di giocatore I assegna a $II.1$).

Il secondo modello è speculare: due tipi per I e un tipo per II, ed il resto di conseguenza.

Il terzo modo presuppone che vi siano due tipi per entrambi i giocatori. Con $u(T, L, I.1, II.1) = 2$ e $u(T, L, I.2, II.2) = 1$, mentre $u(T, L, I.1, II.2)$ e $u(T, L, I.2, II.1)$ non sono state descritte (abbiamo solo due matrici, mentre ne dovremmo avere quattro). E' chiaro come una situazione di questo genere sia tollerabile solo in corrispondenza di specifici belief dei giocatori, ovvero se $p(I.1, II.2) = p(I.2, II.1) = 0$. Detto altrimenti, i tipi dei due giocatori si possono presentare solo appaiati: $I.1$ si incontra solo con $II.1$ e idem per i tipi $I.2$ e $II.2$. Si noti che scrivere $p(I.1, II.2) = p(I.2, II.1) = 0$ vuol dire usare una notazione che fa riferimento al caso di un gioco ad informazione incompleta con un sistema coerente di belief: anzi, possiamo descrivere la probabilità p sulle coppie di tipi di giocatori con la tabella seguente:

I \ II	$II.1$	$II.2$
$I.1$	α	0
$I.2$	0	$1-\alpha$

dove $\alpha \in [0,1]$. Poiché era stata fornita una informazione che utilizzava due matrici, è sensato assumere che sia $\alpha \in]0,1[$. Si noti anche che, per l'analisi del gioco, qualunque valore di α (che non sia 0 o 1) è del tutto equivalente.

Esercizio 4 Due giocatori devono scegliere, a turno, una lettera fra $\{A, B, C\}$. Sono ammesse ripetizioni. Ognuno dei due giocatori ha due turni a disposizione.

Si commenti la seguente affermazione:

> Ogni "storia" del gioco è identificata da una sequenza di 4 caratteri scelti tra A, B, C. Ad esempio, le seguenti sequenze identificano differenti storie: $AAAA$, $ABCA$, $CBAA$, etc. Pertanto, le strategie a disposizione dei due giocatori sono date da tutte le sequenze di questo tipo e quindi sono 3^4.

Soluzione
L'affermazione è scorretta. Ad esempio, le seguenti sono due *diverse* strategie per I:

$$x_1 = A\, A_{AA}\, A_{AB}\, A_{AC}\, A_{BA}\, A_{BB}\, A_{BC}\, A_{CA}\, A_{CB}\, A_{CC} \tag{6}$$

$$x_2 = A\, A_{AA}\, A_{AB}\, A_{AC}\, B_{BA}\, B_{BB}\, B_{BC}\, B_{CA}\, B_{CB}\, B_{CC} \tag{7}$$

Il significato dei simboli dovrebbe essere chiaro. Il primo simbolo indica la scelta fatta all'inizio da I (in entrambe le strategie, I sceglie A alla sua prima mossa); gli altri simboli indicano cosa egli fa dopo le diverse possibili storie: ad esempio, B_{CA} indica che I, quando gli ritocca giocare, gioca B (qualora lui avesse scelto C alla prima mossa e II avesse giocato A).

Si verifica agevolmente come, qualunque sia la strategia y usata da II, le coppie di strategie (x_1, y) e (x_2, y) danno luogo entrambe alla storia $AUAV$ (dove U e V indicano le scelte che II si troverà ad effettuare usando la strategia y da lui scelta). In particolare, se II decide di usare la strategia che prevede di scegliere sempre A ad ogni suo nodo decisionale, (x_1, y) e (x_2, y) danno luogo entrambe alla storia $AAAA$. Quindi, le strategie a disposizione dei giocatori sono più delle possibili storie del gioco.

D'altronde, il numero di strategie per I è $3 \cdot 3^9$, mentre quello per II è $3^3 \cdot 3^{27}$. Come si vede, i conti non tornano. Le strategie sono molte di più delle storie.

Osservazione. Le due strategie di I descritte in (6) e (7) differiscono tra loro per via di scelte diverse che I progetta di fare in nodi che non saranno raggiunti vista la *sua scelta* fatta al primo nodo decisionale. Potrebbe cambiare qualcosa che usassimo la forma normale ridotta? (Per dettagli e terminologia sulla forma normale ridotta, vedasi Myerson).

Esercizio 5 Trovare tutti gli equilibri correlati per il "pari o dispari".

Soluzione

Esattamente come avevamo visto per la "battaglia dei sessi", anche nel caso del "pari o dispari" gli equilibri correlati sono caratterizzati dalle seguenti 4 equazioni (ci riferiamo qui al caso generale, dove μ è una qualsiasi distribuzione di probabilità su $X \times Y$, ovvero su $\{P, D\} \times \{P, D\}$):

$$\begin{cases} -\mu_{11} + \mu_{12} \geq \mu_{11} - \mu_{12} \\ \mu_{21} - \mu_{22} \geq -\mu_{21} + \mu_{22} \\ \mu_{11} - \mu_{21} \geq -\mu_{11} + \mu_{21} \\ -\mu_{12} + \mu_{22} \geq \mu_{12} - \mu_{22} \end{cases} \tag{8}$$

Ovvero:

$$\begin{cases} \mu_{12} \geq \mu_{11} \\ \mu_{21} \geq \mu_{22} \\ \mu_{11} \geq \mu_{21} \\ \mu_{22} \geq \mu_{12} \end{cases} \tag{9}$$

Quindi, usando in catena le quattro disuguaglianze, otteniamo:

$$\mu_{12} \geq \mu_{11} \geq \mu_{21} \geq \mu_{22} \geq \mu_{12}$$

Quindi tutti i μ_{ij} sono uguali tra loro. E pertanto tutti uguali ad 1/4.

Morale, l'unico equilibrio correlato che troviamo coincide con l'unico equilibrio in strategie miste del "pari o dispari"