Teoria dei Giochi

Corso di laurea specialistica:
Decisioni economiche, impresa e responsabilità sociale, A.A. 2004/05
Soluzioni degli esercizi del 27 gennaio 2005

Esercizio 1 Nella battaglia dei sessi:

I \ II	L	R
T	$2,1$	$0,0$
B	$0,0$	$1,2$

a) Trovare tutti gli equilibri correlati del tipo:

I \ II	L	R
T	α	β
B	β	α

(naturalmente, $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1/2$).
b) Trovare tutti gli equilibri correlati descritti da una probabilità prodotto.

Soluzione

Gli equilibri correlati per la battaglia dei sessi sono caratterizzati dalle seguenti 4 equazioni (ci riferiamo qui al caso generale, dove μ è una qualsiasi distribuzione di probabilità su $X \times Y$, ovvero su $\{T, B\} \times \{L, R\}$):

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mu_{11} \cdot 2 + \mu_{12} \cdot 0 & \geq & \mu_{11} \cdot 0 + \mu_{12} \cdot 1 \\ \mu_{21} \cdot 0 + \mu_{22} \cdot 1 & \geq & \mu_{21} \cdot 2 + \mu_{22} \cdot 0 \\ \mu_{11} \cdot 1 + \mu_{21} \cdot 0 & \geq & \mu_{11} \cdot 0 + \mu_{21} \cdot 2 \\ \mu_{12} \cdot 0 + \mu_{22} \cdot 2 & \geq & \mu_{12} \cdot 1 + \mu_{22} \cdot 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

Cioè:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\mu_{11} & \geq & \mu_{12} \\ \mu_{22} & \geq & 2\mu_{21} \\ \mu_{11} & \geq & 2\mu_{21} \\ 2\mu_{22} & \geq & \mu_{12} \end{array} \right.$$

Nel caso speciale richiesto, le disequazioni diventano:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\alpha & \geq & \beta \\ \alpha & \geq & 2\beta \\ \alpha & \geq & 2\beta \\ 2\alpha & \geq & \beta \end{array} \right.$$

Le ultime due disequazioni sono chiaramente superflue. Tenuto conto del fatto che $\alpha + \beta = 1/2$, ovvero che $\beta = 1/2 - \alpha$, otteniamo:

$$\begin{cases} 2\alpha & \geq & 1/2 - \alpha \\ \alpha & \geq & 2(1/2 - \alpha) \end{cases}$$

Ovvero:

$$\begin{cases} 6\alpha & \geq & 2 \\ 3\alpha & \geq & 1 \end{cases}$$

E quindi la condizione diventa $\alpha \geq 1/3$. Tenendo conto del fatto che deve essere $\alpha \leq 1/2$, gli equilibri correlati del tipo richiesto sono tutti quelli per cui $1/3 \leq \alpha \leq 1/2$ (e con $\beta = 1/2 - \alpha$). I due casi "estremi" sono:

I \ II	L	R
T	1/3	1/6
B	1/6	1/3

I \ II	L	R
T	1/2	0
B	0	1/2

Naturalmente la matrice a destra descrive l'equilibrio correlato in cui viene scelto con pari probabilità uno dei due equilibri in strategie pure. Esso può essere realizzato con un meccanismo i cui risultati sono pubblicamente osservabili. Ciò non è vero per l'altro caso estremo, ovvero la matrice di sinistra: qui è essenziale che ad ogni giocatore sia comunicato solo la riga (rispettivamente: colonna) che "deve" giocare.

Passiamo al punto b). Prendiamo il sistema (1) da cui siamo partiti, sostituendo $p_i q_j$ a μ_{ij}. Anzi, useremo (come di solito in questi casi) p per p_1, $1-p$ per p_2 etc.

$$\begin{cases} 2pq & \geq & p(1-q) \\ (1-p)(1-q) & \geq & 2(1-p)q \\ pq & \geq & 2(1-p)q \\ 2(1-p)(1-q) & \geq & p(1-q) \end{cases}$$

Se consideriamo il caso in cui $p, q \in]0, 1[$, otteniamo:

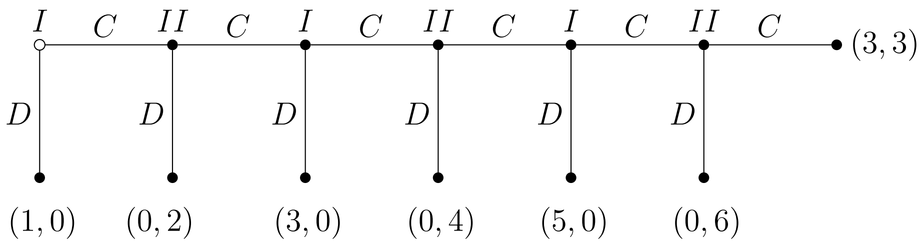
$$\begin{cases} 2q & \geq & (1-q) \\ (1-q) & \geq & 2q \\ p & \geq & 2(1-p) \\ 2(1-p) & \geq & p \end{cases}$$

Dalle prime due disequazioni ricaviamo che $q = 1/3$ e dalle seconde due che $p = 2/3$. Ovvero, otteniamo l'equilibrio in strategie miste della BoS.

E' facile verificare che il caso $p = 0$ ci porta a $p = 0$ e $q = 0$, ovvero all'equilibrio in strategie pure (B, R). Allo stesso equilibrio ci porta anche il caso $q = 0$. Invece i due casi $p = 1$ e $q = 1$ ci conducono entrambi all'altro equilibrio in strategie pure (T, L).

Insomma, niente di nuovo dagli equilibri correlati se ci restringiamo alle probabilità prodotto. Come ci si poteva attendere!

Esercizio 2 Si consideri il gioco seguente:



Trovarne gli SPE. Commentare

Soluzione

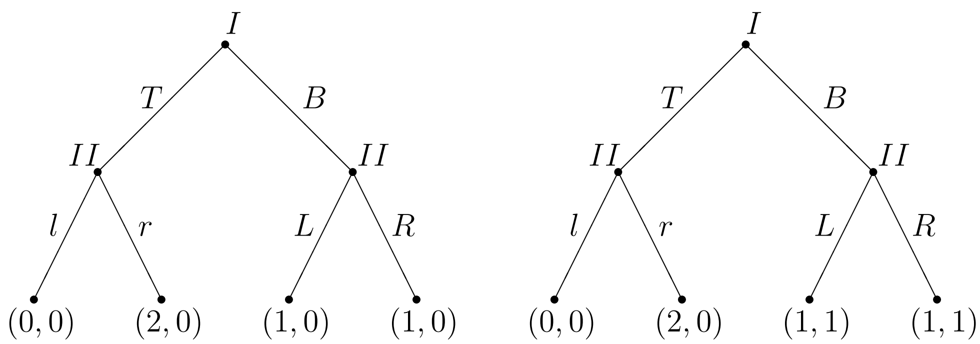
L'unico SPE è (DDD, CCC). I commenti a voi.

Esercizio 3 Si consideri un gioco a due sole "mosse" e ad informazione perfetta. Individuare condizioni che garantiscano l'*unicità* del SPE.

Soluzione

Una condizione sufficiente è che i payoff di II siano tutti distinti tra loro e così i payoff di I. In questo modo siamo certi che quando II sceglie, ad ogni nodo, la sua "mossa" migliore, questa è univocamente determinata. Per lo stesso motivo, anche la scelta di I sarà univoca.

Esercizio 4 Determinare gli SPE per entrambi i giochi in figura. Commentare.



Soluzione

Il gioco a sinistra ha i seguenti SPE: (B, lL), (B, lR), (T, rL), (T, rR). Anche per quello di destra gli SPE sono (B, lL), (B, lR), (T, rL), (T, rR). I commenti a voi.