Teoria dei Giochi

Corso di laurea specialistica:
Decisioni economiche, impresa e responsabilità sociale, A.A. 2004/05
Soluzioni degli esercizi del 20 gennaio 2005

Esercizio 1 a) Provare che un massimo ombra è equilibrio di Nash
b) provare che una coppia di strategie fortemente dominanti è un equilibrio di Nash
c) provare che, se un giocatore ha una strategia fortemente dominante, questa è unica

Soluzione
parte a)
Se $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ è un massimo ombra, allora:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, y) \qquad \text{per ogni } x \in X, y \in Y \tag{1}$$

$$g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(x, y) \qquad \text{per ogni } x \in X, y \in Y \tag{2}$$

E quindi, a maggior ragione:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \qquad \text{per ogni } x \in X \tag{3}$$

$$g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \qquad \text{per ogni } y \in Y \tag{4}$$

Pertanto $(\bar{x}, \bar{y})$ è un equilibrio di Nash.

parte b)
Siano $\bar{x}$ e $\bar{y}$ due strategie fortemente dominanti per I e II rispettivamente.
Se $\bar{x} \in X$ è una strategia fortemente dominante, allora:

$$f(\bar{x}, y) > f(x, y) \qquad \text{per ogni } x \in X \text{ con } x \neq \bar{x}, \text{ per ogni } y \in Y \tag{5}$$

e quindi:

$$f(\bar{x}, y) \geq f(x, y) \qquad \text{per ogni } x \in X, \text{ per ogni } y \in Y \tag{6}$$

pertanto :

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \qquad \text{per ogni } x \in X \tag{7}$$

Analogamente, dal fatto che $\bar{y}$ è dominante per II si ricava che:

$$g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \qquad \text{per ogni } y \in Y \tag{8}$$

Pertanto $(\bar{x}, \bar{y})$ è un equilibrio di Nash.
parte c)

Siano $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$ due strategie fortemente dominanti, con $\bar{x} \neq \bar{\bar{x}}$. Allora si avrà:

$$f(\bar{x}, y) > f(\bar{\bar{x}}, y) \qquad \text{per ogni } y \in Y \tag{9}$$

ed anche:

$$f(\bar{\bar{x}}, y) > f(\bar{x}, y) \qquad \text{per ogni } y \in Y \tag{10}$$

Ma ovviamente le due relazioni sono contraddittorie.

Esercizio 2 Trovare gli equilibri di Nash (in strategie pure) dei giochi seguenti.

I \ II	L	R
T	$100, 100$	$1, 1$
B	$1, 1$	$100, 100$

I \ II	L	R
T	$99, 99$	$0, 0$
B	$0, 0$	$98, 98$

Quale pensate venga effettivamente giocato? Commentare.

Soluzione

Gli equilibri di Nash sono (T, L) e (B, R) per entrambi i giochi. I commenti a voi!

Esercizio 3 Trovare gli equilibri di Nash sia in pure che in miste per seguente gioco (Dilemma del Prigioniero), in cui: $a < b < c < d$.

I \ II	L	R
T	c, c	a, d
B	d, a	b, b

Soluzione

L'unico equilibrio di Nash in strategie pure è (B, R).

Vediamo le strategie miste. Se I gioca la strategia mista $(p, 1-p)$ e II gioca $(q, 1-q)$, il payoff atteso per I è:

$$cpq + ap(1-q) + d(1-p)q + b(1-p)(1-q) =$$

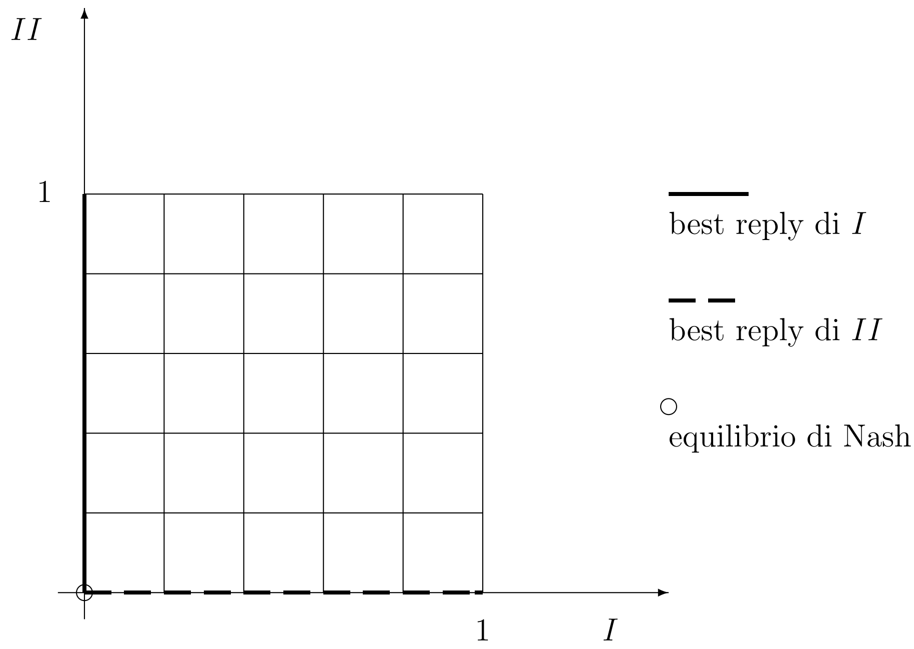
$$= [(c-d)q + (a-b)(1-q)]p + (d-b)q + b$$

Per ipotesi $c-d<0$ e $a-b<0$, quindi $(c-d)q<0$ tranne che per $q=0$, però in tal caso $(a-b)(1-q)<0$, pertanto $(c-d)q+(a-b)(1-q)<0$ qualunque sia q.

Pertanto il payoff per I è massimo (qualunque sia q) per $p=0$. Quindi la "best reply" per I è sempre $p=0$ per ogni q.

Discorso del tutto simmetrico vale per II, per il quale la "best reply" è $q=0$ per ogni $p \in [0,1]$.

Possiamo anche disegnare il grafico delle "best reply":



Quindi, l'estensione mista del dilemma del prigioniero ha un unico equilibrio di Nash che corrisponde all'unico equilibrio in strategie pure del gioco dato.

D'altronde, questi risultati erano ampiamente scontati: dato che la strategia T è fortemente dominata, qualunque strategia mista che sia "best reply" assegna sempre probabilità 0 a T. Per i dettagli, si può consultare la soluzione dell'esercizio seguente.

Esercizio 4 Trovare gli equilibri di Nash per l'estensione mista del gioco:

$I \backslash II$	L	C	R
T	$(3,2)$	$(5,4)$	$(7,8)$
B	$(5,9)$	$(1,11)$	$(4,3)$

Soluzione

Osserviamo preliminarmente che la strategia L è fortemente dominata da C. Ne segue che ogni strategia mista di II che sia miglior risposta a una qualunque strategia di I assegna sempre probabilità 0 ad L (se per assurdo fosse assegnata ad L una probabilità positiva, converrebbe "trasferire" tale probabilità dalla strategia L alla strategia C, ottenendo un payoff atteso di II strettamente maggiore, in contraddizione con l'assunto che fosse una "miglior risposta").

Ci si può quindi restringere, nella ricerca di equilibri, alle strategie miste del tipo $(0, q, 1-q)$ per II (con ovvio significato dei simboli, si spera!).

Il payoff atteso per I da $(p, 1-p)$ e $(0, q, 1-q)$ è:

$$5pq + 7p(1-q) + 1(1-p)q + 4(1-p)(1-q) =$$

$$= (q+3)p + (4-3q)$$

Poiché il coefficiente di p è maggiore di 0, la "best reply" per I è sempre $p = 1$. Cosa che non dovrebbe sorprendere, visto che "eliminata" la strategie L la strategia B di I diventa fortemente dominata ...

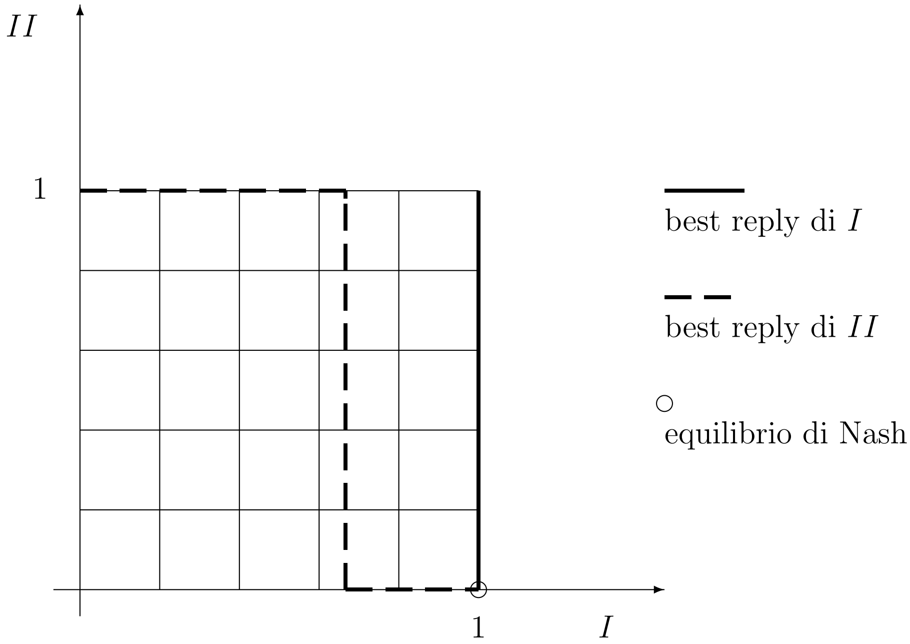
Per quanto riguarda II, il suo payoff atteso e:

$$4pq + 8p(1-q) + 11(1-p)q + 3(1-p)(1-q) =$$

$$= (-12p+8)q + (5p+3)$$

E, allora, se $p < 2/3$ la "best reply" per II è $q = 1$, per $p > 2/3$ è $q = 0$, ed infine per $p = 2/3$ è tutto l'intervallo $[0, 1]$.

Disegniamo i grafici delle migliori risposte per trovare gli equilibri di Nash:



Come era prevedibile, troviamo un solo equilibrio di Nash (che è, di fatto, in strategie pure): dopotutto la coppia (T, R) è l'unica che sopravvive all'eliminazione iterata di strategie fortemente dominate.