

Teoria dei Giochi

Corso di laurea specialistica:

Decisioni economiche, impresa e responsabilità sociale, A.A. 2004/05

Soluzioni degli esercizi del 13 gennaio 2005

Esercizio 1 Trovare l'equivalente certo della lotteria che dà come risultato 1000 con probabilità $1/4$ e 2000 con probabilità $3/4$, nel caso in cui $u(x) = \sqrt{x}$.

Se $u(x) = \ln(x)$? E se $u(x) = 2x - 7$?

Soluzione

Occorre risolvere l'equazione $\sqrt{x} = \frac{1}{4} \sqrt{1000} + \frac{3}{4} \sqrt{2000} \approx \frac{1}{4} 31,62 + \frac{3}{4} 44,72 \approx 7,91 + 33,54 = 41,45$ Da cui $x \approx 1718,10$.

Nel caso di $\ln(x)$ i calcoli sono analoghi.

Nel caso $u(x) = 2x - 7$, abbiamo un decisore indifferente al rischio (la sua funzione di utilità si ottiene da $u(x) = x$ con una trasformazione affine strettamente crescente) e quindi l'equivalente certo coincide col guadagno atteso, ovvero $\frac{1}{4} 1000 + \frac{3}{4} 2000 = 1750$

Esercizio 2 Descrivere una strategia del gioco del "tris", per il primo giocatore.

Soluzione

Vediamo una descrizione parziale. Intanto, una codifica per le caselle del "tris":

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Allora, una strategia per il giocatore I (cioè per il giocatore che comincia il gioco) è:

- primo turno per I
 mette la croce su 1
- secondo turno per I
 se II ha messo il tondo su una delle caselle da 3 a 9, allora I mette la croce su 2
 se II ha messo il tondo sulla casella 2, I mette la croce su 3

- terzo turno per I

se II ha messo il tondo su una delle caselle da 5 a 9, allora I mette la croce su 3 (se non l'aveva messa su 3 già II o I stesso; in tal caso I la mette su 4)

se II ha messo il tondo sulla casella 4, I mette la croce su 3 (se non l'aveva messa su 3 già II o I stesso; in tal caso I la mette su 4)

se II ha messo il tondo sulla casella 3, I mette la croce su 4 (se non l'aveva messa su 3 già II o I stesso; in tal caso I la mette su 4)

- e così via ...

In realtà stiamo scrivendo un “libretto di istruzioni” che vuole descrivere una strategia molto semplice da spiegare: il giocatore I mette ad ogni suo turno la sua crocetta sulla casella libera contraddistinta dal numero (nella numerazione che abbiamo dato) più basso.

L'abbozzo di descrizione minuziosa precedente può indurre a immaginare che una descrizione esaustiva sia molto complicata (se lo è già così, volendo descrivere una strategia molto semplice, figuriamoci la descrizione di una strategia più “contorta”).

Forse vale anche la pena di “contare” quante sono le strategie a disposizione di I : sono

$$9 \cdot 7^{9-8} \cdot 5^{9-8-7-6} \cdot 3^{9-8-7-6-5-4} \cdot 1^{9-8-7-6-5-4-3-2} = 9 \cdot 7^{72} \cdot 5^{3024} \cdot 3^{60480} \approx \\ \approx 9 \cdot 7,03 \cdot 10^{60} \cdot 4,84 \cdot 10^{2113} \cdot 1,96 \cdot 10^{28856} \approx 6,02 \cdot 10^{31031}$$

Questo numero è molto più grande di quanto di solito uno immagina prima di fare i calcoli espliciti. Va detto che il calcolo fatto presuppone che il gioco finisca solo quando sono state riempite tutte le nove caselle. Se si ritiene che il gioco finisca non appena uno dei giocatori ha fatto un tris, allora il numero si riduce ma resta comunque molto, molto alto. Come mai allora il tris viene considerato, ed a ragione, un gioco poco interessante? Perché, nonostante questo numero così grande di strategie, l'analisi del gioco viene molto semplificata se si tiene conto delle simmetrie del gioco e, soprattutto, se si è interessati a trovare solo una strategia vincente o quanto meno ottimale: in tal caso, molte alternative sono ovviamente da scartare.

Esercizio 3 Sia dato:

$I \backslash II$	L	C	R
T	(1, 2)	(3, 4)	(5, 6)
B	(7, 8)	(9, 0)	(1, 2)

Descrivere (X, Y, f, g) . Trovare eventuali massimi ombra o strategie fortemente dominanti. Trovarne equilibri di Nash, se ne esistono.

Soluzione

E' $X = \{T, B\}$, $Y = \{L, R\}$; dalla tabella si deduce anche che $f(T, L) = 1$, $f(T, C) = 3, \dots, f(B, R) = 1$ e che $g(T, L) = 2, \dots, g(B, R) = 2$.

La coppia (B, C) è il punto (unico) in cui f assume il valore massimo; la coppia (B, L) è il punto (unico) in cui g assume il valore massimo. Non vi è quindi alcun punto in cui sia f che g assumano il loro valore massimo e quindi non esiste il massimo ombra.

Non vi sono strategie dominanti per I : $f(T, L) = 1 \leq 7 = f(B, L)$ e quindi T non può essere fortemente dominante; analogamente B non lo può essere perché $f(B, R) = 1 \leq 5 = f(T, R)$. Idem per II : L non è fortemente dominante perché $g(T, L) \leq g(T, C)$, C non lo è perché $g(T, C) \leq g(T, R)$ e infine R neppure perché $g(B, R) \leq g(B, L)$.

La "best reply" è descritta "graficamente" nella tabella seguente, mediante sottolineatura per la "best reply" di I e sovralineatura per II :

$I \backslash II$	L	C	R
T	(1, 2)	(3, 4)	(<u>5</u> , <u>6</u>)
B	(<u>7</u> , <u>8</u>)	(<u>9</u> , 0)	(1, 2)

Vi sono dunque due equilibri di Nash: (B, L) e (T, R) . Si noti che l'esito derivante da (T, R) non è debolmente efficiente (in senso paretiano), neanche se ci limitiamo agli esiti che si ottengono da equilibri di Nash.