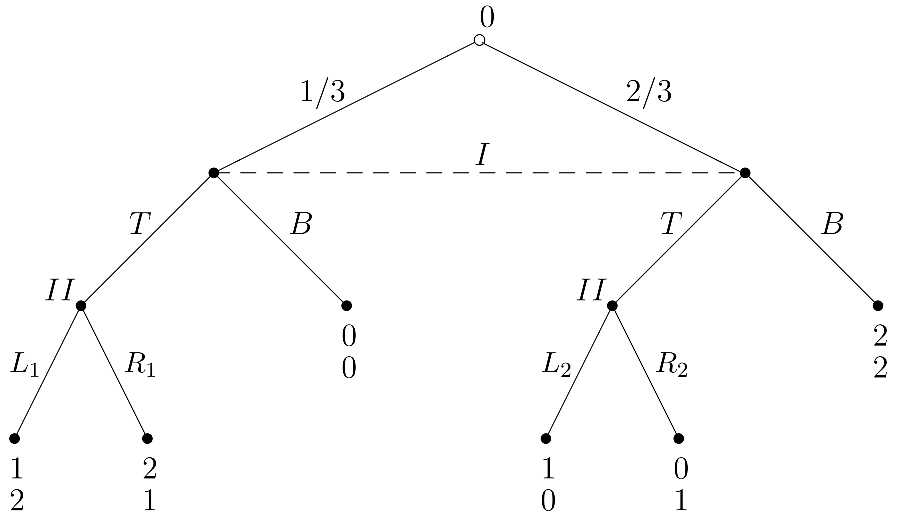
Corso di Teoria dei Giochi, esame 4 aprile 2005
LS: decisioni economiche, impresa e responsabilità sociale, A.A. 2004/05

Tempo: 2 ore e 1/2; risolvere 3 dei 4 esercizi proposti; le risposte agli esercizi 3 e 4 non possono superare una pagina e mezza; non è consentito l'uso di testi, appunti, etc...

Esercizio 1 Si consideri il seguente gioco in forma estesa:



a) scriverne la forma strategica;
b) determinarne gli equilibri di Nash in strategie pure;
c) esistono strategie dominate?

Soluzione
Le strategie a disposizione di I sono T e B. Quelle per II sono L_1L_2, L_1R_2, R_1L_2, R_1R_2.

Se I sceglie B, il payoff atteso (per qualunque strategia di II) è: $\frac{1}{3}0+\frac{2}{3}2 = \frac{4}{3}2$, sia per I che per II. Se invece I sceglie T, i payoff attesi sono:

- se II gioca L_1L_2: $\frac{1}{3}1 + \frac{2}{3}1 = 1$ per I e $\frac{1}{3}2 + \frac{2}{3}0 = \frac{2}{3}$ per II

- se II gioca L_1R_2: $\frac{1}{3}1 + \frac{2}{3}0 = \frac{1}{3}$ per I e $\frac{1}{3}2 + \frac{2}{3}1 = \frac{4}{3}$ per II

- se II gioca R_1L_2: $\frac{1}{3}2 + \frac{2}{3}1 = \frac{4}{3}$ per I e $\frac{1}{3}1 + \frac{2}{3}0 = \frac{1}{3}$ per II

- se II gioca R_1R_2: $\frac{1}{3}2 + \frac{2}{3}0 = \frac{2}{3}$ per I e $\frac{1}{3}1 + \frac{2}{3}1 = 1$ per II

Pertanto, la forma strategica è la seguente:

$I \backslash II$	L_1L_2	L_1R_2	R_1L_2	R_1R_2
T	$(1, \frac{2}{3})$	$(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$	$(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$	$(\frac{2}{3}, 1)$
B	$(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$	$(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$	$(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$	$(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$

Si verifica immediatamente che il gioco dato ha 4 equilibri di Nash: (B, L_1L_2), (B, L_1R_2), (B, R_1L_2), (B, R_1R_2).

Non vi sono strategie fortemente dominanti. Sia la strategia B per I che la strategia L_1R_2 per II sono strettamente dominanti. Altre strategie dominanti non ve ne sono.

Esercizio 2 Sia dato un TU-game così definito: $v(S) = f(s)$, dove s indica il numero di elementi di S (essendo S un generico sottoinsieme non vuoto di un insieme finito N) e dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione data.
a) se la funzione f è strettamente crescente, il gioco v è superadditivo?
b) è vero che il valore Shapley è pari a $\frac{f(n)}{n}$ per ogni giocatore?
c) per $n = 3$, trovare condizioni necessarie e condizioni sufficienti su f affinché il nucleo sia non vuoto

Soluzione
a) No. Basta considerare, ad esempio, $f(s) = s + 1$. Se prendiamo sia S che T (disgiunto da S) con un elemento, abbiamo: $f(S \cup T) = 3 < 4 = 2 + 2 = f(S) + f(T)$.

b) Sì. La condizione di simmetria garantisce che $\Phi_i(v)$ è uguale per ogni giocatore i; inoltre per la "efficienza": $n\Phi_i(v) = f(n) = v(N)$, da cui si ricava appunto che $\Phi_i(v) = \frac{f(n)}{n}$ per ogni giocatore i.

c) Le condizioni che caratterizzano le allocazioni (x_1, x_2, x_3) appartenenti al nucleo, in questo caso si riducono a: $x_i \geq f(1)$, $x_i + x_j \geq f(2)$ e $x_1 + x_2 + x_3 = f(3)$.

Se restringiamo l'attenzione alle allocazioni per cui $x_1 = x_2 = x_3$, allora una condizione sufficiente affinché il nucleo sia non vuoto è che sia $\frac{2}{3}f(3) \geq f(2)$ e $\frac{1}{3}f(3) \geq f(1)$.

Queste condizioni sono anche necessarie. Le condizioni (relative alle coalizioni con due elementi): $x_1 + x_2 \geq f(2)$, $x_1 + x_3 \geq f(2)$ e $x_2 + x_3 \geq f(2)$ implicano che sia $2(x_1 + x_2 + x_3) = 2f(3) \geq 3f(2)$.

Esercizio 3 I problemi di contrattazione e la soluzione di Nash.

Esercizio 4 Descrivere la best reply dynamics ed il fictitious play.