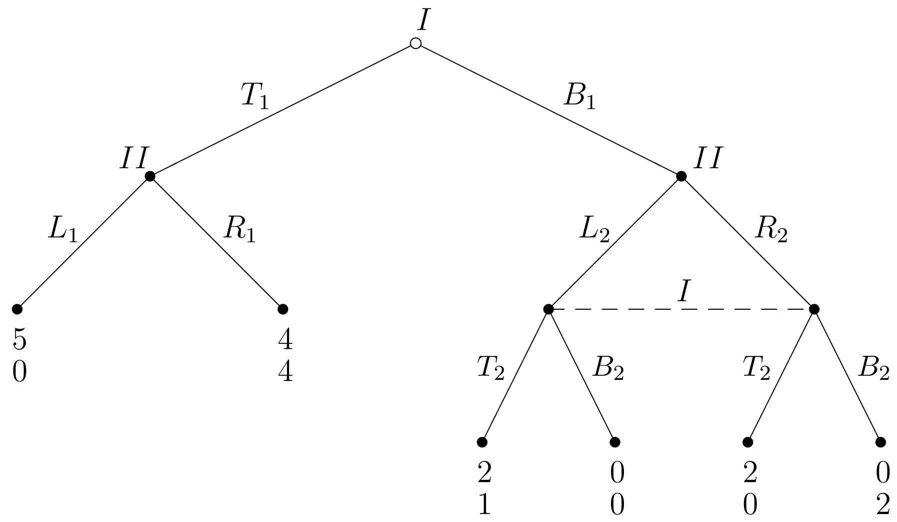
Corso di Teoria dei Giochi, esame 14 aprile 2005
LS: decisioni economiche, impresa e responsabilità sociale, A.A. 2004/05

Tempo: 2 ore e 1/2; risolvere 3 dei 4 esercizi proposti; le risposte agli esercizi 3 e 4 non possono superare una pagina e mezza; non è consentito l'uso di testi, appunti, etc... GIUSTIFICARE LE RISPOSTE.

Esercizio 1 Si consideri il seguente gioco in forma estesa:



a) scriverne la forma strategica;
b) determinarne gli equilibri di Nash in strategie pure (se esistono);
c) trovarne gli equilibri perfetti nei sottogiochi (se esistono)

Soluzione
La forma strategica è (è sottolineata la "best reply" per I e sopralineata quella per II):

$I \backslash II$	L_1L_2	L_1R_2	R_1L_2	R_1R_2
T_1T_2	$(\underline{5},0)$	$(\underline{5},0)$	$(\underline{4},\overline{4})$	$(\underline{4},\overline{4})$
T_1B_2	$(\underline{5},0)$	$(\underline{5},0)$	$(\underline{4},\overline{4})$	$(\underline{4},\overline{4})$
B_1T_2	$(2,\overline{1})$	$(2,0)$	$(2,\overline{1})$	$(2,0)$
B_1B_2	$(0,0)$	$(0,\overline{2})$	$(0,0)$	$(0,\overline{2})$

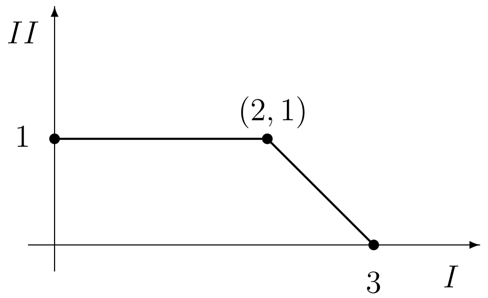
Vi sono pertanto quattro equilibri in strategie pure: (T_1T_2, R_1L_2), (T_1T_2, R_1R_2), (T_1B_2, R_1L_2), (T_1B_2, R_1R_2).

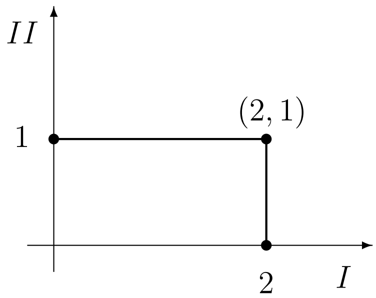
Il gioco dato ha due sottogiochi propri. Uno, quello a sinistra in figura, ha come equilibrio R_1. Il sottogioco a destra ha, come unico equilibrio, (T_2, L_2), come si verifica agevolmente dalla forma strategica riportata qui sotto:

$I \backslash II$	L_2	R_2
T_2	$(2,1)$	$(2,0)$
B_2	$(0,0)$	$(0,2)$

Pertanto, dei quattro equilibri di Nash, l'unico che è perfetto nei sottogiochi (cioè l'unico la cui restrizione ai sottogiochi è ancora un equilibrio) è (T_1T_2, R_1L_2).

Esercizio 2 Trovare le soluzioni di Nash e di Kalai-Smorodinsky per i seguenti problemi di contrattazione (in entrambi i casi il "disagreement point" è $(0,0)$).





Soluzione

Nella figura a sinistra, per la condizione di efficienza la soluzione si troverà sul lato obliquo del trapezio che rappresenta S.

Poiché (S, d) è essenziale, la soluzione di Nash è data da:

$$\Phi(S, d) = \text{argmax}\{(x - d_1) \cdot (y - d_2) \ : \ (x, y) \in S \cap (d + \mathbb{R}^2_{\geq})\}$$

Visto che $d = (0,0)$, occorre massimizzare xy sul segmento individuato da: $x + y = 3$, $x \geq 2$, $y \geq 0$.

Condizioni necessarie di massimo sulla retta $x + y = 3$ si trovano coi moltiplicatori di Lagrange (o anche per sostituzione, ad esempio riducendo il problema alla massimizzazione di $x(3 - x)$) e danno come soluzione $x = y = 3/2$, punto che sta sulla retta (ovviamente!) ma non sul segmento. Quindi il massimo di xy sul segmento si trova in uno dei due vertici: xy vale 0 in $(3,0)$ e 2 in $(2,1)$, pertanto è quest'ultimo punto, ovvero $(2,1)$, la soluzione di Nash del problema dato.

Per quanto riguarda Kalai-Smorodinsky, il punto utopia è $(3,1)$ e pertanto la soluzione di KS è data dall'intersezione della retta $y = x/3$ con la retta $x + y = 3$. Quindi otteniamo $(9/4, 3/4)$.

Per la figura a destra, la soluzione è immediata. In S vi è un unico punto fortemente efficiente, che è $(2,1)$ e quindi esso rappresenta sia la soluzione di Nash che quella di KS.

Esercizio 3 Presentare il valore Shapley.

Esercizio 4 Descrivere e discutere l'equilibrio di Nash.