

Esercizio 1 Determinare gli eventuali equilibri di Nash in strategie pure del seguente gioco in forma strategica:

$I \backslash II$	L	C	R
T	0, 1	-1, 3	1, 3
M	0, 2	1, 1	2, 0
B	1, 0	1, -1	3, 0

Esistono strategie debolmente dominate? E strategie fortemente dominate?

Soluzione

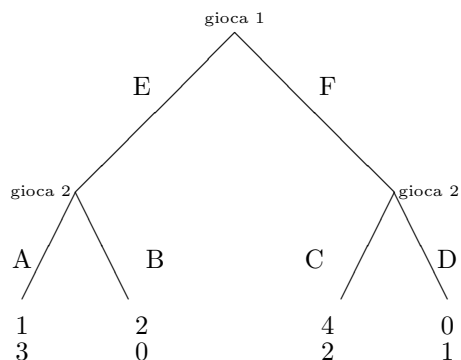
Indichiamo la “best reply” sottolineando i vari elementi della matrice:

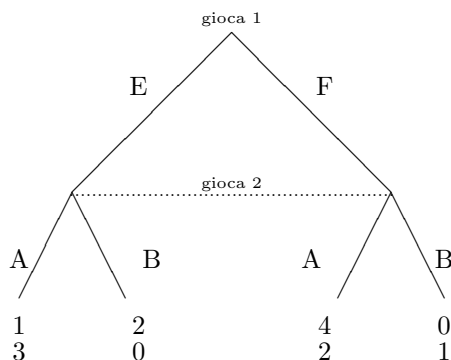
$I \backslash II$	L	C	R
T	0, 1	-1, <u>3</u>	1, <u>3</u>
M	0, <u>2</u>	<u>1</u> , 1	2, 0
B	<u>1</u> , <u>0</u>	<u>1</u> , -1	<u>3</u> , <u>0</u>

Quindi gli equilibri di Nash sono (B, L) e (B, R) .

La strategia T è fortemente dominata da B . La strategia T è debolmente dominata da M e da B . La strategia M è debolmente dominata da B . Il giocatore II non ha strategie dominate

Esercizio 2 Si considerino i seguenti due giochi in forma estesa:





Scrivere la forma strategica di entrambi (uno è a informazione perfetta, mentre l'altro non lo è).

Calcolare gli equilibri di Nash in strategie pure e gli equilibri perfetti nei sottogiochi di quello dei due che è a informazione perfetta.

Calcolare gli equilibri di Nash in strategie miste di quello non a informazione perfetta.

Soluzione

La forma strategica del primo gioco è:

$I \backslash II$	AC	AD	BC	BD
E	1, <u>3</u>	<u>1</u> , <u>3</u>	2, 0	<u>2</u> , 0
F	<u>4</u> , <u>2</u>	0, 1	<u>4</u> , <u>2</u>	0, 1

Nella forma strategica abbiamo già sottolineato i payoff per mostrare la best reply e trovare gli equilibri di Nash. Gli equilibri di Nash sono (E, AD) , (F, AC) e (F, BC) . Di questi (F, AC) è l'unico equilibrio perfetto nei sottogiochi (cosa che si verifica agevolmente applicando l'induzione a ritroso).

La forma strategica del secondo gioco è:

$I \backslash II$	A	B
E	1, <u>3</u>	<u>2</u> , 0
F	<u>4</u> , <u>2</u>	0, 1

Anche qui abbiamo sottolineato, etc... Il gioco ha un solo equilibrio di Nash: (F, A) .

Per quanto riguarda le strategie miste, usiamo come di solito $p, 1-p$ e $q, 1-q$

per indicare le strategie miste rispettivamente di I e II .

Il payoff atteso di I è:

$$\begin{aligned} f(p, q) &= pq + 2p(1 - q) + 4(1 - p)q = pq + 2p - 2pq + 4q - 4pq = \\ &= -5pq + 2p + 4q = p(2 - 5q) + 4q \end{aligned}$$

Quindi per $q < 2/5$ la best reply per I è $p = 1$, per $q = 2/5$ è tutto $[0, 1]$, per $q > 2/5$ la best reply è $p = 0$.

Per II il payoff atteso è:

$$\begin{aligned} g(p, q) &= 3pq + 2p(1 - q) + (1 - p)(1 - q) = 3pq + 2q - 2pq + 1 - p - q + pq = \\ &= 2pq - p + 1 + q = q(2p + 1) + (1 - q) \end{aligned}$$

La best reply per II è sempre $q = 1$, qualunque sia p .

In figura 1 disegniamo le best reply:

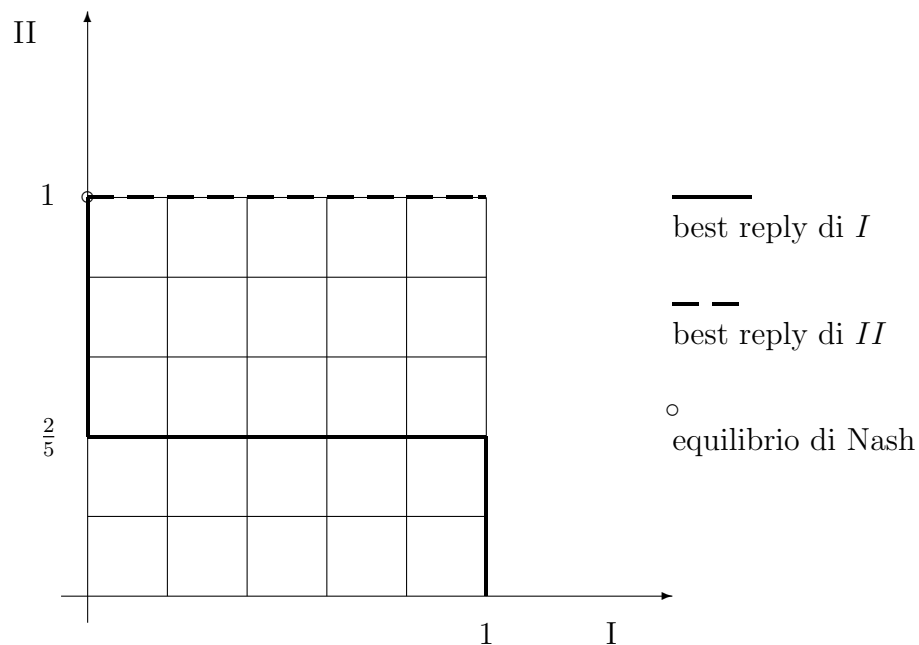


Figura 1: I grafici delle corrispondenze di miglior risposta

Le best reply ci permettono di individuare gli equilibri di Nash in strategie miste. L'unico che troviamo è indicato in figura, e corrisponde a $p = 0$ e

$q = 1$. Vale a dire, si tratta dell'equilibrio in strategie pure che già avevamo trovato.

Potevamo in realtà risparmiarci i conti, semplicemente osservando che la strategia A domina strettamente B .

Esercizio 3 Dato il gioco $(\{1, 2, 3\}, v)$ con v funzione caratteristica tale che:

$$v(\emptyset) = v(1) = v(2) = 0, v(3) = 1;$$

$$v(1, 2) = 9, v(2, 3) = 5, v(1, 3) = 6, v(1, 2, 3) = 12$$

Calcolare il valore Shapley del gioco $(\{1, 2, 3\}, v)$ e dire se sta nel nucleo.

Soluzione

Costruiamo la tabella seguente, dove nella prima colonna mettiamo le varie permutazioni possibili dei tre giocatori, mentre nella colonna intestata con i mettiamo i guadagni marginali attribuiti al giocatore i nelle varie permutazioni possibili. Le due ultime righe contengono le somme dei guadagni marginali e poi tali valori divisi per 6 (ovverossia 3!), vale a dire il valore Shapley.

permutazione	1	2	3
123	0	9	3
132	0	6	6
213	9	0	3
231	7	0	5
312	5	6	1
321	7	4	1
totale	28	25	19
valore Shapley	28/6	25/6	19/6

Si può osservare che $\phi_1(v) + \phi_2(v) = 28/6 + 25/6 = 53/6 < 54/6 = 9 = v(\{1, 2\})$ e quindi il valore Shapley non sta nel nucleo.

Esercizio 4 Si consideri il gioco $(\{1, 2, 3\}, w)$ con w funzione caratteristica tale che:

$$w(\emptyset) = 0, w(1) = 2, w(2) = 3, w(3) = 1;$$

$$w(1, 2) = 5, w(2, 3) = 4, w(1, 3) = 3, w(1, 2, 3) = 6$$

Trovare i giocatori dummy del gioco $(\{1, 2, 3\}, w)$.

Sfruttare la proprietà del dummy player e quella di additività riferite al valore Shapley per calcolare il valore Shapley del gioco $(\{1, 2, 3\}, v + w)$.

Soluzione

La verifica che ogni giocatore è un “dummy player” è banale, anche se noiosa (per ogni giocatore i , e per ogni coalizione S che non contenga i , abbiamo $w(S \cup \{i\}) = w(S) + w(\{i\})$).

Ne segue che $\phi_i(w) = w(i)$. E quindi $\phi_1(w) = 2, \phi_2(w) = 3, \phi_3(w) = 1$.

La proprietà di additività del valore Shapley ci permette di trovare immediatamente il valore Shapley per $v + w$ ed è:

$$\phi_1(v + w) = 2 + 28/6, \quad \phi_2(v + w) = 3 + 25/6, \quad \phi_3(v + w) = 1 + 19/6$$