1 Giochi in forma strategica

1.1 Introduzione ai giochi in forma strategica

1.2 Equilibrio di Nash nei giochi in forma strategica

Esercizio 1 *Sia $G = (X_1, X_2, H_1, H_2)$ un gioco a due persone. Si consideri $G' = (X_1, X_2, H_1', H_2')$, con $H_1' \leq H_1$ e $H_2' \geq H_2$. È vero che per qualsiasi equilibrio di Nash $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ per G e $(\bar{x}_1', \bar{x}_2')$ per G', $H_1'(\bar{x}_1', \bar{x}_2') \leq H_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ e $H_2'(\bar{x}_1', \bar{x}_2') \geq H_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$?*
È vero per almeno un equilibrio di Nash per G e uno per G'?

Esercizio 2 *Sia $G = (X_1, X_2, H_1, H_2)$ un gioco a due persone. Si consideri $G' = (X_1', X_2', H_1', H_2')$, con $X_1' \subseteq X_1$ e $X_2' = X_2$, e H_1', H_2' sono semplicemente le restrizioni di H_1, H_2 a $X_1' \times X_2'$. È vero che per qualsiasi equilibrio di Nash $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ per G e $(\bar{x}_1', \bar{x}_2')$ per G', $H_1'(\bar{x}_1', \bar{x}_2') \leq H_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ e $H_2'(\bar{x}_1', \bar{x}_2') \geq H_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$?*
È vero per almeno un equilibrio di Nash per G e uno per G'?

Esercizio 3 *Si adattino convenientemente i due esercizi precedenti al caso dei giochi a somma zero e si risponda alle stesse domande.*

Esercizio 4 *Siano $f, g : [0,1] \to [0,1]$ continue e tali che $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [0,1]$. Si consideri la corrispondenza definita come $F(x) = \{t \in \mathbb{R} : f(x) \leq t \leq g(x)\}$. È a valori chiusi? A valori convessi? Semicontinua superiormente? Si può applicare il teorema del punto fisso di Kakutani?*

Esercizio 5 *Si trovino esempi di corrispondenze da $[0,1]$ a $[0,1]$, che soddisfino tutte le ipotesi del teorema di Kakutani eccetto una, senza punti fissi. Da farsi per ciascuna delle ipotesi.*

Esercizio 6 *Si consideri un gioco (X_1, X_2, H_1, H_2), e sia $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in X_1 \times X_2$ t.c.:*

$$H_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \geq H_1(x_1, x_2) \qquad \forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$$

$$H_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \geq H_2(x_1, x_2) \qquad \forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$$

Si provi che $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ è un equilibrio di Nash, e si mostri con un esempio che il viceversa non è vero.
Si fornisca un esempio di un gioco tale che non esista una coppia del tipo $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.
Nel caso esista, si considererebbe facile prevedere la scelta dei giocatori?

Esercizio 7 *Sia* $H'_1 = a_1 H_1 + b_1$ *e* $H'_2 = a_2 H_2 + b_2$. *Si provi che* (X_1, X_2, H_1, H_2) *e* (X_1, X_2, H'_1, H'_2) *hanno lo stesso equilibrio di Nash.*

Esercizio 8 *Sia* $G = (X, Y, f, g)$, *con* $X = Y = [0,1]$ *e* $f(x,y) = xy$, $g(x,y) = x + y$.
Si disegnino le corrispondenze di miglior risposta e si provi che $(1,1)$ *è l'unico equilibrio di Nash di questo gioco.*

Esercizio 9 *Si consideri il seguente gioco in forma strategica a tre persone:*

$I\backslash II$	A	B	C
A	2 0 1	2 0 1	2 0 1
B	2 0 1	1 2 0	2 0 1
C	2 0 1	2 0 1	0 1 2

$III \quad A$

$I\backslash II$	A	B	C
A	2 0 1	1 2 0	2 0 1
B	1 2 0	1 2 0	1 2 0
C	2 0 1	1 2 0	0 1 2

$III \quad B$

$I\backslash II$	A	B	C
A	2 0 1	2 0 1	0 1 2
B	2 0 1	1 2 0	0 1 2
C	0 1 2	0 1 2	0 1 2

$III \quad C$

Verificare che gli equilibri di Nash in strategie pure sono (A, A, A), (A, B, A), (B, B, B), (A, C, C), (C, C, C).

Esercizio 10 *Due giocatori dicono (contemporaneamente) un numero naturale. Il giocatore che dice il numero più alto vince. Si descriva la forma strategica di questo gioco e si trovino i suoi equilibri di Nash (quali assunzioni fare sulle preferenze dei giocatori?).*

Esercizio 11 *Si dia una definizione appropriata di un gioco simmetrico (in forma strategica). Specificarla, per un gioco matriciale, su un'assunzione adatta sulla matrice. È vero che ogni equilibrio di Nash per un gioco simmetrico è simmetrico? È vero che qualsiasi gioco simmetrico ha sempre almeno un equilibrio di Nash simmetrico? Se non è sempre vero, si aggiungano le assunzioni adatte per garantirlo.*

Esercizio 12 *Sia X un gioco in forma strategica. Sia X' il gioco che si ottiene da X cancellando le strategie fortemente dominate. C'è qualche relazione tra gli equilibri di Nash di X e di X'? La stessa domanda per strategie debolmente dominate.*

1.3 Strategie miste nei giochi finiti

1.4 Giochi bimatrice

Esercizio 13 *Si trovino gli equilibri di Nash del gioco bimatrice:*

$I\backslash II$	L		R	
T	2	0	4	-2
B	0	3	2	1

$I\backslash II$	L		R	
T	7	0	1	-2
M	2	-1	2	1
B	0	3	4	0

Esercizio 14 *Si consideri la battaglia dei sessi:*

$I\backslash II$	C		T	
C	2	1	0	0
T	0	0	1	2

È corretto dire che l'equilibrio (C, C) è più favorevole per il giocatore I che per il giocatore II?

Esercizio 15 *Si consideri il gioco:*

$I\backslash II$	C		T	
C	2	10	0	0
T	0	0	1	20

C'è qualche differenza con la battaglia dei sessi?

Esercizio 16 *Nel dilemma del prigioniero, il risultato è inefficiente poiché c'è un altro esito che è preferito da entrambi i giocatori. Ma per ogni giocatore c'è un payoff persino migliore. Questo fatto è inevitabile?*

Esercizio 17 *Si trovino tutti gli equilibri di Nash puri e misti per:*

$I \backslash II$	C		T	
C	0	0	3	1
T	1	3	2	2

Esercizio 18 *C'è un certo ammontare di denaro, C, da dividere tra due giocatori. Entrambi devono scegliere, simultaneamente, un numero in $[0,1]$, che rappresenta la quota minima di C che chiedono. Si assuma che il giocatore I scelga α e il giocatore II scelga β. Se $\alpha+\beta \leq 1$, la somma C sarà divisa in accordo alle richieste (e $(1-\alpha-\beta)\cdot C$ viene lasciato "sul tavolo). Se $\alpha+\beta > 1$, otterranno $\frac{\alpha C}{\alpha+\beta} - h$ e $\frac{\beta C}{\alpha+\beta} - h$ rispettivamente, dove h è un qualche ammontare positivo di denaro.*
Si trovino gli equilibri di Nash di questo gioco (se esistono). Si applica il teorema di Nash a questo gioco?

Esercizio 19 *(Una versione discreta del problema precedente).*
Ci sono 100 euro sul tavolo. Entrambi i giocatori devono scegliere un intero in $\{0,1,\ldots,100\}$. Sia m la scelta di I ed n la scelta di II. I payoff sono i seguenti.
Se $m+n \leq 100$, I ottiene m e II ottiene n
Se $m+n > 100$, I ottiene $\left[\frac{m}{m+n}\cdot 100\right] - 10$ e II ottiene $\left[\frac{n}{m+n}\cdot 100\right] - 10$ (il simbolo $[\cdot]$ denota la parte intera)
Ci sono equilibri di Nash puri per questo gioco? Si disegnino le corrispondenze di miglior risposta (in strategie pure).

Esercizio 20 *Se un gioco 2×2 ha più di tre equilibri di Nash, allora deve avere un numero infinito di equilibri. Vero?*

Esercizio 21 *Si consideri il gioco seguente:*

$I \backslash II$	L		C		R	
T	1	1	11	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{3}{4}$
M	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
B	0	0	10	$\frac{1}{2}$	1	0

Si trovino gli equilibri di Nash in strategie pure, se esistono.
Cosa succede se I non può usare la strategia T, cioè se il gioco diventa il seguente?

$I\backslash II$	L		C		R	
M	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
B	0	0	10	$\frac{1}{2}$	1	0

Si commenti.

Esercizio 22 *(Preso da Osborne e Rubinstein). Ci sono n giocatori. Ognuno deve scegliere (simultaneamente) un numero in $\{1, \ldots, n\}$. Un euro viene diviso equamente tra tutti i giocatori che scelgono il numero più vicino ai $2/3$ del numero medio. Si provi che l'estensione mista di questo gioco ha un unico equilibrio di Nash, che è in strategie pure.*

1.5 Giochi a somma zero a due persone

Esercizio 23 *Si calcolino i punti sella dei seguenti giochi:*

$I\backslash II$	L	R
T	1	2
B	1	3

$I\backslash II$	L	R
T	1	3
M	0	2
B	2	0

$I\backslash II$	L	R
T	0	1
U	1	2
D	2	3
B	3	0

1.6 Giochi matriciali

1.7 Giochi matriciali e Programmazione lineare

1.8 Raffinamenti dell'equilibrio di Nash nei giochi finiti

2 Giochi in forma estesa

2.1 Introduzione ai giochi in forma estesa

Esercizio 24 *C'è un certo ammontare di denaro, C, sul tavolo. Ci sono due giocatori, che possono scegliere (simultaneamente) tra T (prendere) o L (lasciare). La matrice dei payoff è la seguente:*

$I \backslash II$	T		L	
T	$C/2$	$C/2$	C	0
L	0	C	$*$	

Se entrambi scelgono L, viene aggiunta una somma h a C e c'è un secondo round, con regole simili, cosicché i payoff in questo secondo (e ultimo) round saranno:

$I \backslash II$	T		L	
T	$\frac{C+h}{2}$	$\frac{C+h}{2}$	$C+h$	0
L	0	$C+h$	0	0

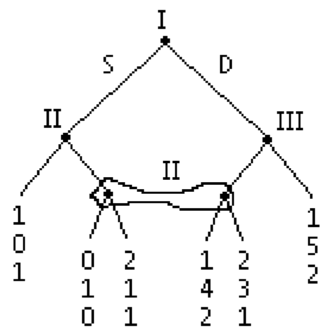
Si trovino gli equilibri di Nash di questo gioco

Esercizio 25 *Si generalizzi l'esercizio precedente al caso di n round.*

Esercizio 26 *Si consideri un gioco in forma estesa, ad informazione perfetta. Si assuma che il giocatore I abbia due nodi di decisione. Se il numero delle strategie per I è 5, cosa si può dedurre sulle mosse a lui disponibili in questi nodi di decisione? L'assunzione di informazione perfetta è rilevante? Domande analoghe se il numero delle strategie è 6, o 12.*

Esercizio 27 *Un gioco in forma estesa con 3 nodi finali deve essere un gioco ad informazione perfetta. Vero? "Essenzialmente vero? Cosa dire del caso di un gioco con 3 esiti diversi?*

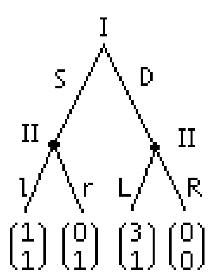
Esercizio 28 *La seguente figura descrive un gioco in forma estesa? In caso di risposta positiva, è un gioco a memoria perfetta?*



Esercizio 29 *Si costruisca un gioco in forma estesa a due giocatori, tale che ogni giocatore non sappia, quando deve muovere, se egli sia il primo o il secondo a dover muovere. Si provi a fare un esempio simile a tre giocatori. Avete qualche esempio concreto di un gioco del genere?*

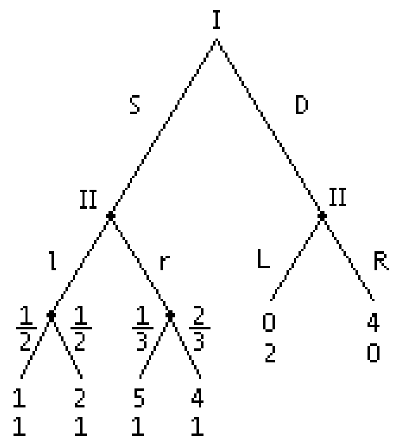
2.2 Equilibrio di Nash nei giochi in forma estesa

Esercizio 30 *Si consideri il seguente gioco in forma estesa:*



Si descrivano le strategie dei giocatori I e II, e si scriva la bimatrice che descrive il gioco in forma strategica.

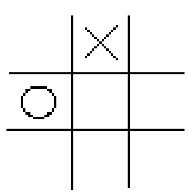
Esercizio 31 *Si consideri il seguente gioco in forma estesa:*



Si verifichi che la sua forma strategica è data dalla seguente bimatrice:

$I\backslash II$	lL		rL		lR		rR	
S	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{13}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{13}{3}$	1
D	0	2	0	2	4	0	4	0

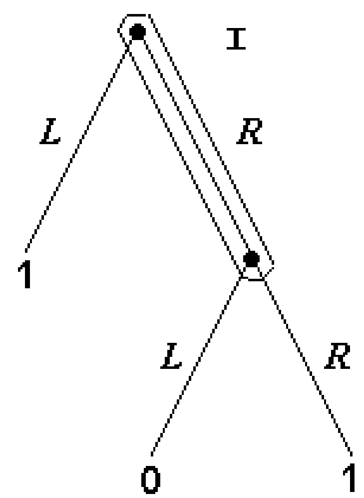
Esercizio 32 *Si consideri il gioco TIC-TAC-TOE. Cioè, il giocatore I inizia mettendo una croce in una casella, poi il giocatore II mette un cerchio in una casella vuota, e così via, alternando le mosse:*



Il gioco finisce quando un giocatore ha tre dei suoi simboli in una riga (va bene anche in diagonale), in tal caso egli è il vincitore; altrimenti, quando si sono riempite tutte le caselle (e il gioco finisce in pareggio).
Si provi che nessun giocatore ha una strategia vincente. Si descriva qualche

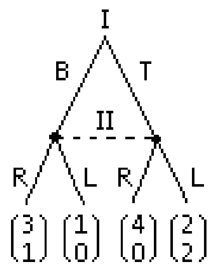
forma ridotta della forma estesa per questo gioco, sfruttando le simmetrie. In questo tipo di semplificazioni è coinvolta la razionalità o l'intelligenza dei giocatori? Quante strategie ha il giocatore I nel gioco nella sua forma estesa completa?

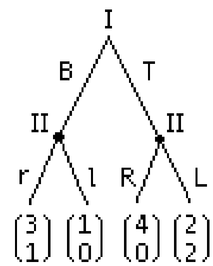
Esercizio 33 *Il "gioco seguente non soddisfa le assunzioni per un gioco in forma estesa:*



Quale condizione non è soddisfatta? Potete immaginare una situazione che possa essere descritta da un "gioco del genere?
Considerereste un "gioco del genere come un gioco a memoria perfetta?
C'è qualche problema nell'adattare le definizioni di strategie miste e comportamentali ad un "gioco del genere? È valido il teorema di Kuhn sulle strategie miste/comportamentali per un "gioco del genere?

Esercizio 34 *Si considerino i due giochi seguenti:*





$I\backslash II$	L	R
T	2 2	4 0
B	1 0	3 1

B è dominata.
Così II gioca L
e l'equilibrio
darà i payoff $(2,2)$.

$I\backslash II$	lL	lR	rL	rR
T	2 2	4 0	2 2	4 0
B	1 0	1 0	3 1	3 1

lR è dominata.
Allora lL e rR sono debolmente dominate. Ci aspettiamo che II scelga rL. Così, I sceglie B. I payoff sono $(3,1)$.
(Se l'eliminazione delle strategie debolmente dominate non è convincente, si noti che (B, rL) è un equilibrio perfetto nei sottogiochi).

Si commenti.

Esercizio 35 *È dato un gioco con tre giocatori: I, II, III. Ogni giocatore può prendere 1 o 2 monete.*

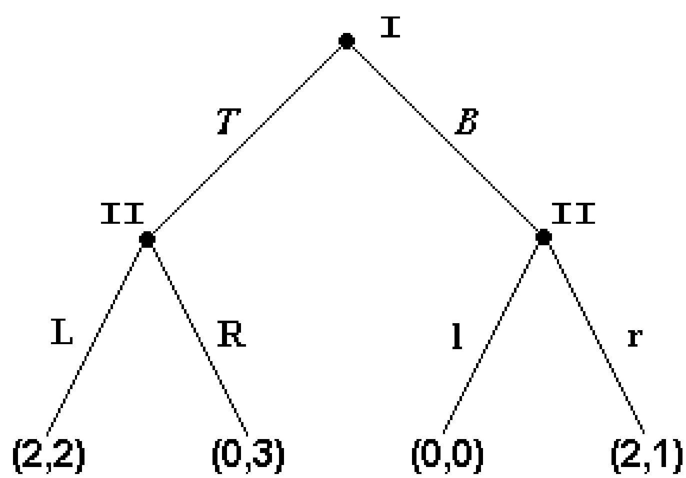
strategie di I: $i = 1,\ 2$

strategie di II: $j = 1,\ 2$

strategie di III: $k = 1,\ 2$

I giocatori che prendono lo stesso numero di monete otterranno come payoff 0, mentre il giocatore che prende un numero diverso di monete rispetto agli *altri avrà come payoff lo stesso numero di euro delle monete che ha preso. Si trovino gli equilibri di Nash di questo gioco, sia puri che misti.*

Esercizio 36 *Si trovi una strategia comportamentale per il giocatore II che sia equivalente alla strategia mista che assegna probabilità* $1/2$ *a* Ll *e a* Rr *(e zero alle strategie rimanenti) per il seguente gioco in forma estesa:*



2.3 Giochi ad informazione incompleta

Esercizio 37 *Si trovi l'equilibrio di Nash Bayesiano per il seguente gioco ad informazione incompleta:*

$I\backslash II$	L	R
T	2,-1	1,0
B	0,1	3,0

p

$I\backslash II$	L	R
T	1,1	0,0
B	0,-1	1,0

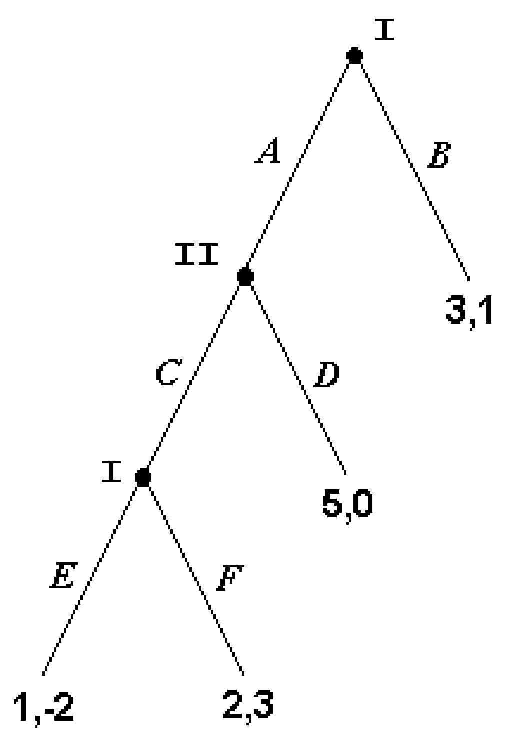
$1-p$

per $p = 0.9$, $p = 0.5$, *e per qualsiasi* $p \in]0,1[$. *Si trovi il limite degli equilibri di Nash Bayesiani per* $p \to 0$ *e per* $p \to 1$.
Si commenti.

2.4 Equilibrio perfetto nei sottogiochi

Esercizio 38 *Sul tavolo ci sono due righe di fiammiferi, ognuna contenente esattamente due fiammiferi. I giocatori I e II muovono a turno: ogni giocatore può prendere, dalla riga (non vuota...) che vuole, qualsiasi numero positivo di fiammiferi. Il giocatore che prende l'ultimo fiammifero perde. Si descriva la forma estesa di questo gioco e si trovino i suoi equilibri perfetti nei sottogiochi.*

Esercizio 39 *Si consideri il gioco non cooperativo descritto nella forma estesa dalla figura seguente:*



a) si descriva la forma strategica del gioco
b) si trovino tutti i suoi equilibri di Nash in strategie pure
c) si trovino gli equilibri perfetti nei sottogiochi
d) dopo l'eliminazione delle strategie dominate, si trovino gli equilibri di Nash in strategie miste

3 Teoria della contrattazione

3.1 Introduzione alla contrattazione cooperativa a due persone

3.2 Soluzioni per i problemi di contrattazione a due persone

Esercizio 40 *Si consideri B_2, l'insieme dei problemi di contrattazione a due persone, e la seguente proprietà per una soluzione ϕ:*
Monotonicità *(MON). ϕ soddisfa (MON) se, per ogni $(S,d),(T,d) \in B_2$: $S_d \subseteq T_d$ implica che $\phi_1(S,d) \leq \phi_1(T,d)$ e $\phi_2(S,d) \leq \phi_2(T,d)$.*
Si provi che né la soluzione di Nash né la soluzione di Kalai-Smorodinski soddisfano (MON).
(MON) è una proprietà desiderabile per i problemi di contrattazione?

Esercizio 41 *Si consideri B_2, l'insieme dei problemi di contrattazione a due persone, e la proprietà (MON) definita sopra. Si mostri che (MON) e (PO) sono incompatibili*

Esercizio 42 *Si scoprino almeno tre assunzioni "nascoste per l'approccio usato da Nash per ottenere una soluzione ai problemi di contrattazione.*

Esercizio 43 *Due giocatori devono dividersi* 100 *euro. La funzione d'utilità di von Neumann-Morgenstern per I è $u_1(x) = x$, mentre per II è $u_2(x) = \sqrt{x}$. Si costruisca un'appropriato problema di contrattazione e si trovi la soluzione di Nash e di Kalai-Smorodinski per un tale problema di contrattazione.*

Esercizio 44 *Si consideri il seguente gioco bimatrice:*

$I \backslash II$	L	l	r	R
T	2,1	0,2	1,0	1,4
M	4,2	0,0	-1,2	2,3
B	3,1	1,2	-1,3	3,-2

Si calcoli il maxmin per I e II, e lo si prenda come il punto di "disaccordo. Si trovi l'immagine nello spazio dei payoff del gioco, assumendo che i giocatori possano giocare qualsiasi strategia correlata (cioè, qualsiasi distribuzione di probabilità sul prodotto degli spazi di strategia). Si determinino le soluzioni di Nash e di Kalai-Smorodinski per questo problema di contrattazione.

Esercizio 45 *Sia S definito come $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 16\}$. Si trovi la soluzione di Nash al problema di contrattazione per (S,d), nel caso $d = (0,0)$ e nel caso $d = (0,1)$.*

3.3 Implementazione delle soluzioni per i problemi di contrattazione a due persone

4 Giochi ad utilità trasferibile

4.1 Introduzione ai giochi ad utilità trasferibile

4.2 Il nucleo e i concetti associati

Esercizio 46 *Si consideri il gioco ad utilità trasferibile definito come segue:* $v(1) = v(2) = 1$, $v(12) = 0$. *Il suo nucleo è vuoto (anche l'insieme delle imputazioni è vuoto). Commenti?*

Esercizio 47 *Si consideri un gioco ad utilità trasferibile "simmetrico, cioè dato da* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *e* $v(S) = f(card(S))$. *Per il caso* $card(N) = 3$, *si caratterizzino i giochi superadditivi, semplici, bilanciati, convessi.*

Esercizio 48 *Sotto quali condizioni su* f *i giochi "simmetrici che risultano sono superadditivi? Convessi?*

Esercizio 49 *Il nucleo di un gioco "simmetrico è simmetrico (dare l'appropriata definizione per la simmetria del nucleo)?*

Esercizio 50 *Si provi che, per qualsiasi* S, *la relazione "*x *domina* y *tramite* S *tra le imputazioni è irriflessiva, antisimmetrica e transitiva. Si mostri che la relazione "*x *domina* y *non è transitiva. Si costruisca un gioco* (N, v) *e una coppia di imputazioni* x, y *tali che "*x *domina* y *e "*y *domina* x.

Esercizio 51 *Osborne e Rubinstein (1994) definiscono i giochi coesivi come quei giochi ad utilità trasferibile che soddisfano la seguente condizione:*
Per ogni partizione $S_1, \ldots, S_k$ *di* N, $\sum_{i=1}^{k} v(S_i) \leq v(N)$.
Si provi che un gioco superadditivo è coesivo e che il viceversa non è vero. È vero che per un gioco coesivo $I(v) \neq \emptyset$*?*

Esercizio 52 *La somma di giochi superadditivi è un gioco superadditivo? Stessa domanda per i giochi convessi.*

Esercizio 53 *(Preso da Osborne e Rubinstein). Ci sono* n *stabilimenti. Ognuno estrae acqua da un lago e scarica rifiuti nello stesso lago. Ogni stabilimento pretende acqua pura. Per ogni stabilimento, il costo per purificare il proprio approvvigionamento di acqua è* kc, *dove* k *è il numero di stabilimenti che non tratta i propri rifiuti prima di scaricarli nel lago; a qualsiasi stabilimento costa* b *trattare i propri rifiuti. Si assuma che* $c \leq b \leq nc$.
Si modellizzi questa situazione come un gioco ad utilità trasferibile, assumendo che per qualsiasi coalizione S *il suo valore* $v(S)$ *è il payoff più alto che*

si può garantire (cioè, $v(S)$ è il payoff più alto di S sotto l'assunzione che nessuno degli altri stabilimenti tratti i propri rifiuti).
Si trovino le condizioni sotto le quali il gioco ha nucleo non vuoto e le condizioni per le quali è un singleton.
Si discuta l'interpretazione del nucleo di questo gioco, tenendo in considerazione che la definizione di $v(S)$ fa delle assunzioni sul comportamento dei giocatori fuori da S.

Esercizio 54 *Sia v un gioco ad utilità trasferibile, con insieme dei giocatori N. Dato $S \subseteq N$, la restrizione di v al sottoinsieme di S è un gioco ad utilità trasferibile con insieme dei giocatori S. Il gioco v si dice essere totalmente bilanciato se tutte le sue restrizioni a $S \subseteq N$ sono bilanciate. Si fornisca un esempio di gioco bilanciato che non sia totalmente bilanciato. Un gioco convesso è totalmente bilanciato?*

4.3 Il valore Shapley

Esercizio 55 *Nella definizione di gioco semplice è stata richiesta una condizione di monotonicità ($v(S) \leq v(T)$ dove $S \subseteq T$). Ritenete che una condizione del genere possa essere data per scontato quando i giochi semplici sono usati per descrivere corpi legislativi?*

Esercizio 56 *Quando il valore Shapley di un gioco coincide con $v(i)$ per ogni giocatore i?*

Esercizio 57 *Si consideri la base "canonica per $G(N)$, cioè:*

$$v^S(T) = \begin{cases} 1 & \textit{se } S = T, \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Quale è la matrice di trasformazione dalla base canonica alla base dei giochi ad unanimità? Gli assiomi (EFF), (NPP) e (AN) determinano univocamente la soluzione per i giochi della base canonica?

Esercizio 58 *Si esprima un gioco semplice di maggioranza (con tre giocatori) come una combinazione lineare di giochi ad unanimità.*

Esercizio 59 *Sia $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ un vettore con coordinate non negative e sia $q \in \mathbb{R}$ tale che*

$$0 < q < \sum_{i=1}^{n} p_i \tag{1}$$

Definiremo gioco di maggioranza pesato $[q; p_1, p_2, \ldots, p_n]$ *il gioco semplice* (N, v) *definito come:*

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{se } \sum_{i \in S} p_i \leq q \\ & \\ 1 & \text{se } \sum_{i \in S} p_i > q \end{cases} \tag{2}$$

Si trovi un gioco semplice che non è un gioco di maggioranza pesato. Un gioco di maggioranza pesato è superadditivo? Convesso? Può avere giocatori di veto?

Esercizio 60 *Le quote di una società sono destribuite come segue: un azionista ha il* 20% *delle azioni, mentre ogni altro azionista ha solo una azione. Si calcoli il valore Shapley del gioco ad utilità trasferibile semplice ottenuto assegnando valore* 1 *alla coalizione* S *se i suoi giocatori hanno il* 50% *delle azioni "+1", e zero altrimenti, per i casi di* 10, 100 *e* 1000 *azioni.*
Si commenti.

Esercizio 61 *Sia* $v : 2^N \to \mathbb{R}$ *un gioco semplice. Sia* $i \in N$ *e si considerino le seguenti affermazioni:*
i) $v(N \setminus \{i\}) = 0$
ii) $v(S) = 1$ *se e solo se* $i \in S$
Le affermazioni sono equivalenti:
- *a) sempre*
- *b) se il gioco è coesivo*
- *c) se il gioco è superadditivo*

Esercizio 62 *Il proprietario di una casa vuole venderla perché tenerla è per lui inutile.*
Ci sono due potenziali clienti: uno valuta la casa $a > 0$ *ed il secondo* $b \geq a$.
Si modellizzi questo problema come un gioco ad utilità trasferibile e si determinino il suo nucleo e il valore Shapley.