1 Definizione formale di gioco in forma estesa

Un gioco *finito* in forma estesa è una n-pla $(V, D, r, N, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{M}, E, h, (\succeq_k)_{k \in N})$, dove:

1. (V, D, r) è un albero finito (V, D) con radice r. Il simbolo V denota l'insieme dei nodi (o vertici) dell'albero, mentre D indica i suoi lati (o rami). Indicheremo con Z l'insieme dei nodi (o vertici) finali dell'albero; pertanto $V \setminus Z$ saranno i nodi non terminali. (Vedasi l'appendice per una descrizione generale di cosa si intenda per albero. Si noti comunque che $r \in V$ e pertanto abbiamo un albero non vuoto, ovvero V è non vuoto). [INTERPRETAZIONE: I nodi non terminali, cioè gli elementi di $V \setminus Z$, rappresentano le varie situazioni in cui un giocatore (o la sorte) può (e deve) effettuare una scelta. Potrà essere utile distinguere tra situazioni che differiscono tra loro anche solo per via di una diversa storia pregressa: l'esempio classico è dato dal gioco degli scacchi, in cui posizioni identiche sulla scacchiera possono derivare da diverse serie di mosse precedenti[1], nel qual caso saranno da noi identificate con nodi diversi.]

2. N è un insieme finito. Per evitare conflitti con quanto diremo in seguito, proibiremo che $0 \in N$. [INTERPRETAZIONE: N rappresenta l'insieme dei giocatori. Ci farà comodo introdurre anche un "giocatore" speciale, che chiameremo "sorte" e che identificheremo col simbolo 0 ("zero"), per rappresentare situazioni in cui la "decisione", ovvero la scelta tra diversi rami uscenti da un nodo, non è frutto della deliberazione di uno dei giocatori ma è determinata da un fattore aleatorio "esterno".]

3. $\mathcal{P} = (P_k)_{k \in N^*}$ è una suddivisione di $V \setminus Z$ in sottoinsiemi disgiunti, tanti

[1] Per chi sappia di scacchi, questo potrebbe non apparire nuovo: possono darsi due posizioni identiche per quanto riguarda la posizione dei pezzi sulla scacchiera e nelle quali tocca muovere allo stesso giocatore, ma in un caso è lecito l'arrocco e nell'altra no. Semplicemente perché in un caso il re è stato mosso in precedenza e nell'altra no. Discorso simile può valere rispetto alla possibilità di effettuare la "presa al varco".

Con il modello formale che abbiamo a disposizione, noi considereremo diverse queste situazioni (in quanto caratterizzate dall'avere una *diversa storia* alle spalle). Si noti che distingueremo situazioni tra le quali non c'è alcuna differenza rispetto alle mosse fattibili. Si consideri la situazione in cui sia bianco che nero muovono dapprima il cavallo che sta dalla parte del rispettivo re e poi alla mossa successiva lo rimettono nella casella di partenza. La scacchiera si ritrova quindi coi pezzi disposti esattamente come prima di cominciare il gioco. Noi identificheremo queste due situazioni con nodi differenti dell'albero. D'altro canto, due mosse "inutili" come queste possono essere significative per quanto riguarda regole quali la "ripetizione delle mosse".

quanti sono gli elementi di $N^* = N \cup \{0\}$. Dicendo "suddivisione" intendiamo dire che $\cup_{k \in N^*} P_k = V \setminus Z$. Si noti che ammettiamo anche che alcuni di questi sottoinsiemi siano vuoti (ad esempio, P_0 potrebbe essere vuoto), per cui non usiamo il termine "partizione" per indicare $\mathcal{P}$, in quanto il termine "partizione" è riservato al caso in cui un insieme venga suddiviso in insiemi disgiunti, ognuno dei quali sia non vuoto. [INTERPRETAZIONE: i nodi di P_k, per $k \in N$, rappresentano i nodi di "pertinenza" del giocatore k, ovvero quei nodi in cui il giocatore k sarà chiamato a scegliere, se a tale nodo porterà lo svolgimento del gioco. I nodi di P_0 rappresentano invece le circostanze in cui si ha una "scelta" del caso (per esempio, vengono mescolate le carte, vengono lanciati dadi, etc ...).]

4. $\mathcal{Q} = (Q_{k,j})_{k \in N^*, j \in J_k}$ rappresenta, per ogni k, una partizione di P_k in una famiglia di insiemi $Q_{k,j}$ (l'insieme J_k è semplicemente un insieme di indici). Gli insiemi di $Q_{0,j}$ sono tutti dei singleton. Imponiamo il vincolo che nessuno degli insiemi $Q_{k,j}$ possa contenere due vertici distinti appartenenti ad un cammino elementare che unisce la radice ad uno dei vertici terminali (vedi appendice per dettagli). [INTERPRETAZIONE: ogni $Q_{k,j}$ rappresenta un insieme di nodi, tutti pertinenti il giocatore k, caratterizzati dalla proprietà che, quando il giocatore k si trova in un nodo di $Q_{k,j}$, non sa in quale dei nodi di $Q_{k,j}$ si trova. Per le "scelte" della "sorte", questa complicazione non è necessaria e pertanto richiediamo che gli insiemi $Q_{0,j}$ siano dei singleton.]

5. $\mathcal{M}$ è, per $k \neq 0$, una famiglia di insiemi $M_{k,j}$, uno per ciascuno dei $Q_{k,j}$. Assumiamo che, per ogni nodo di $Q_{k,j}$, sia data una corrispondenza biunivoca tra $M_{k,j}$ e l'insieme dei rami uscenti da tale nodo (cosa voglia dire che un ramo è "uscente" da un nodo dovrebbe essere intuitivamente vero, ma verrà definito formalmente nell'appendice). Per ciascun $Q_{0,j}$ (se ve ne sono), è individuata una applicazione che ad ogni ramo uscente da $Q_{0,j}$ associa un numero reale non negativo, in modo che la somma di tutti questi numeri, al variare di tutti i rami uscenti da $Q_{0,j}$, valga 1. [INTERPRETAZIONE: l'idea è che, in corrispondenza di un nodo di un dato insieme di informazione $Q_{k,j}$, il giocatore k debba fare una scelta da un certo insieme di alternative, che è dato da $M_{k,j}$. Tale insieme di scelte possibili deve essere lo stesso in ogni nodo dell'insieme di informazione $Q_{k,j}$ se si vuole salvaguardare la coerenza interpretativa con quanto detto prima. Naturalmente, scegliere un elemento di $M_{k,j}$ in un nodo o in un altro di $Q_{k,j}$ può avere effetti molto diversi. Per quanto riguarda i nodi della sorte, l'interpretazione dovrebbe essere evidente:

la scelta tra i vari rami uscenti viene effettuata con una estrazione a sorte con le probabilità assegnate rami.]

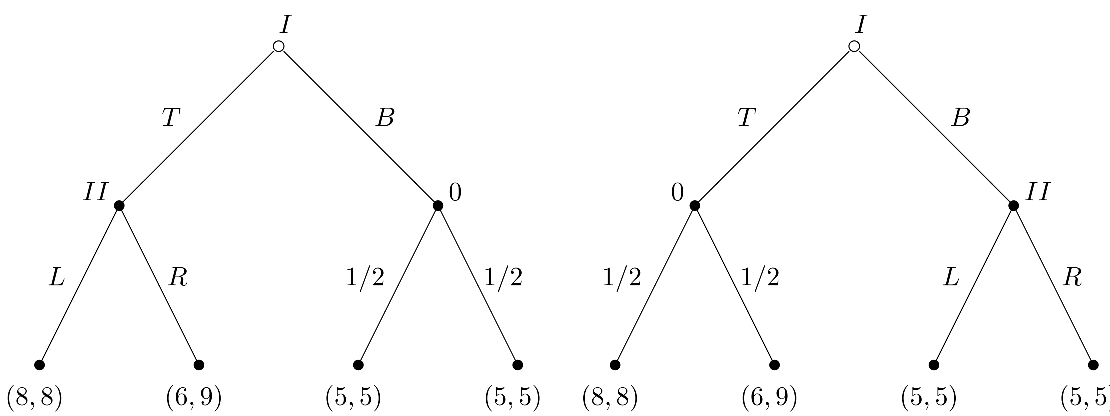
6. E è un insieme. [INTERPRETAZIONE: si tratta dei diversi possibili esiti finali del gioco. Si noti che un esito finale potrebbe incorporare, nella sua descrizione, anche la storia di quanto è avvenuto nel gioco: in questo modo possiamo tenere conto di eventuali esiti "intermedi" (si pensi ai punteggi parziali delle varie "mani" di una partita a carte, ad esempio a scopone).].

7. $h : Z \to E$. [INTERPRETAZIONE: si associa ad ogni vertice finale dell'albero un "esito". Si noti, in riferimento a quanto detto al punto precedente, che un vertice finale individua in modo univoco (vedi osservazione 5) la storia "pregressa", ovvero ciò che è avvenuto dall'inizio del gioco. Questo fatto ci permette di costruire h, se necessario, in modo che l'esito che associamo ad un vertice finale tenga conto, per l'appunto, di tutta la storia del gioco[2].]

8. $(\succeq_k)_{k \in N}$ è una famiglia di preordini totali su E. [INTERPRETAZIONE: si tratta, chiaramente, delle preferenze dei giocatori rispetto agli esiti finali del gioco.]

Volendo, possiamo utilizzare (se ammissibili) funzioni di utilità per rappresentare le preferenze dei giocatori. In tal caso il gioco in forma estesa

[2]Il gioco in figura mostra una situazione interessante, da questo punto di vista.



Si supponga che le coppie ordinate di numeri associate ai payoff finali descrivano guadagni *monetari*, rispettivamente per I e per II. Non è così ovvio il fatto che I preferisca l'esito $(6, 9)$ a $(5, 5)$ nel gioco di sinistra, mentre per quello di destra ci aspettiamo che sia invece così (almeno, normalmente).

verrà descritto come: $(V, D, r, N, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{M}, E, h, (u_k)_{k\in N})$. Volendo, possiamo semplificare la descrizione, rimpiazzando $E, h, (u_k)_{k\in N}$ con le sole funzioni $(f_k)_{k\in N}$, definite come $f_k = u_k \circ h$ (sarà $f_k : Z \to \mathbb{R}$), in analogia perfetta con quanto si fa sia per problemi di decisione che per i giochi in forma strategica. In tal modo, il gioco in forma estesa è dato da: $(V, D, r, N, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{M}, (f_k)_{k\in N})$.

Possiamo parlare anche di "game form" in forma estesa. Essa sarà naturalmente individuata da: $(V, D, r, N, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{M}, E, h)$.

La definizione di gioco in forma estesa che abbiamo visto è dovuta a Kuhn (1953). Egli estende la precedente definizione che era stata data da von Neumann e Morgenstern (1944).

Sono disponibili approcci alternativi, ma equivalenti, alla definizione di gioco in forma estesa. Tra questi, segnalo l'idea di partire dalla idea di "storia": si tratta partire con la descrizione di tutte le possibili "giocate". Rinvio all'ottimo testo di Osborne e Rubinstein (1994) chi fosse interessato.

Osservazione 1 *Per la definizione di gioco in forma estesa si può utilizzare un approccio parzialmente diverso, che però risulta essere equivalente. Cioè, si può fare ricorso all'idea di* etichetta *assegnata ai nodi e ai rami.*

Ad esempio, per identificare i giocatori cui "tocca" muovere, si può usare una funzione $\gamma : V\backslash Z \to N^*$ (che fornisce, appunto le "etichette" da assegnare ai nodi). Naturalmente, data γ, possiamo ottenere i nostri P_k definendo $P_k = \{t \in V\backslash Z : \gamma(t) = k\}$. Viceversa, dati i P_k, è evidente che si potrà definire γ assegnando valore k ad ogni nodo di P_k.

Definizione 1 *Un gioco in forma estesa viene detto ad* informazione perfetta *se ogni insieme di informazione in $\mathcal{Q}$ è un singleton.*

Definizione 2 *Un gioco in forma estesa è detto a* memoria perfetta *se la seguente condizione è soddisfatta.*

Dati tre nodi $x, y, y' \in P_{k_0}$, sia Q_{k_0,j_0} l'insieme di informazione cui appartiene x. Supponiamo che y ed y' appartengano allo stesso insieme di informazione che indichiamo con Q_{k_0,j_1}.

*Sia $m \in M_{k_0,j_0}$. Se y "*segue*" x ed m, allora esiste un nodo $x' \in Q_{k_0,j_0}$ tale che y' "*segue*" x' ed m.*

Anche qui, ci affidiamo ad una idea intuitiva di cosa voglia dire che un nodo "*segue*" un altro nodo ed una "mossa". Rinviamo all'appendice per la formalizzazione di questo concetto. Vedremo anche, in un paragrafo successivo, un esempio di gioco ad memoria imperfetta.

Proviamo a leggere la definizione formale di gioco in forma estesa in un paio di casi.

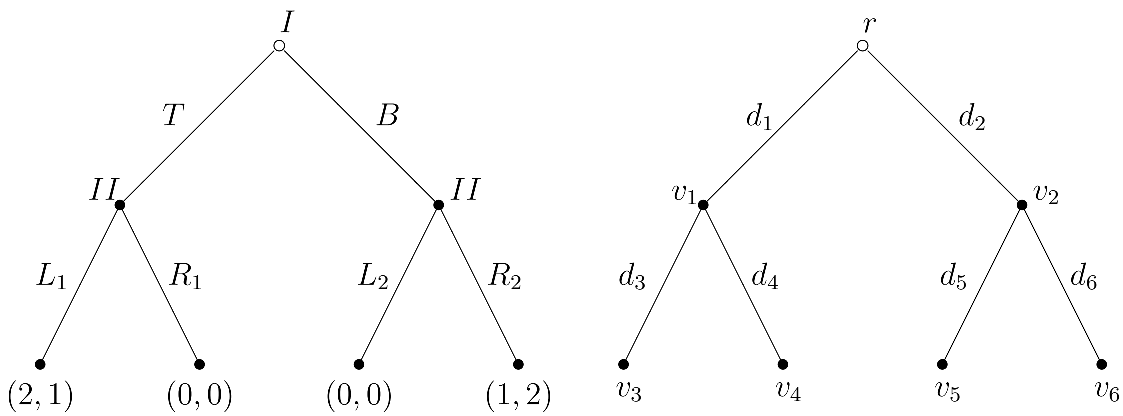


Figura 1: Un primo esempio di forma estesa e (a destra) l'albero "sottostante".

Nella figura 1 abbiamo un albero con 7 nodi (i pallini) e 6 rami (i segmenti). Userò la parte destra della figura 1 per fare riferimento alla struttura d'albero sottostante il gioco. Che il numero dei rami in un albero sia pari al numero dei nodi meno 1 è un fatto generale: vedi appendice. La radice r è evidenziata graficamente per il fatto che è il nodo indicato con un pallino "vuoto", mentre tutti gli altri nodi sono rappresentati da un pallino "pieno".

L'insieme N dei giocatori è $\{I, II\}$. La partizione dei nodi (non terminali) $\mathcal{P}$ è individuata graficamente dal fatto che ad ogni nodo non terminale è posta vicino l'etichetta I o II: Quindi P_I contiene la sola radice, mentre P_{II} contiene gli altri due vertici non terminali: v_1 e v_2. In questo esempio ognuno degli insiemi di informazione è un singleton. Vi è quindi un solo insieme di informazione per I (che contiene la radice r) e vi sono due insiemi di informazione per II (uno contiene il vertice v_1 e l'altro v_2). Abbiamo quindi $J_I = \{1\}$ e $Q_{I,1} = \{r\}$, e $J_{II} = \{1, 2\}$ e $Q_{II,1} = \{v_1\}$, $Q_{II,2} = \{v_2\}$

Inoltre, $M_{I,1} = \{T, B\}$; $M_{II,1} = \{L_1, R_1\}$ ed $M_{II,2} = \{L_2, R_2\}$. La corrispondenza biunivoca tra ciascuno di questi insiemi ed i rami "uscenti" dal corrispondente insieme di informazione è indicata graficamente semplicemente ponendo i nomi degli elementi di questi insiemi vicino ai rami "corrispondenti". Volendo essere formali fino in fondo, possiamo dire che (ad esempio, per quanto riguarda $M_{I,1}$) a T è assegnato il ramo d_1, a B il ramo d_2.

Infine, abbiamo posto vicino ad ognuno dei nodi finali una coppia ordinata di numeri reali che rappresentano i valori che le funzioni di utilità (rispettivamente per il giocatore I e per II) assegnano all'esito associato a tale nodo finale. Si noti che nella descrizione grafica è completamente ignorato quale sia l'esito finale. Dopotutto, ciò che interessa sono le preferenze dei giocatori rispetto a quegli esiti finali, non cosa essi siano.

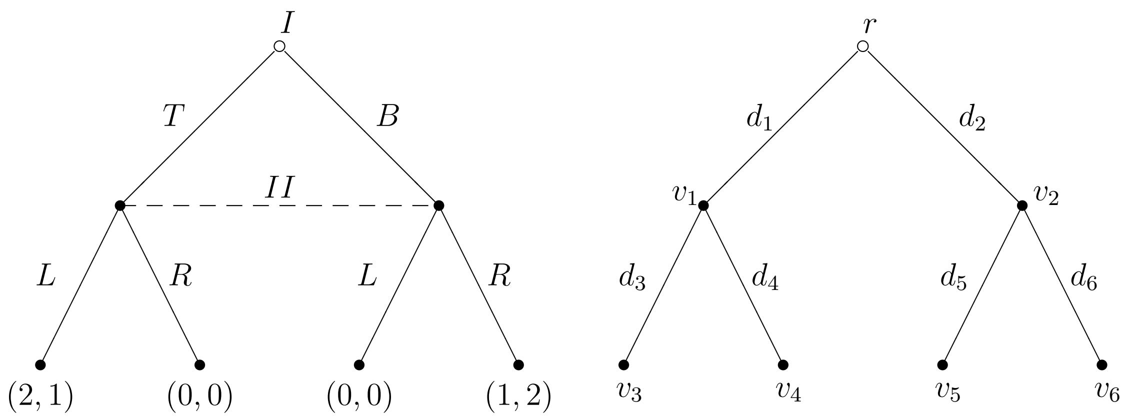


Figura 2: Un secondo esempio di forma estesa e (a destra) l'albero "sottostante".

Come si può immediatamente notare, l'albero sottostante questo secondo esempio, mostrato in figura 2, è del tutto identico a quello di figura 1.

Anche per quanto riguarda il gioco, vi sono notevoli somiglianze. Mi limiterò quindi a mettere in evidenza le differenze. Nel gioco di figura 2, abbiamo che stavolta $J_{II} = \{1\}$ e $Q_{II,1} = \{v_1, v_2\}$.

$M_{II,1} = \{L, R\}$ ed anche in questo caso la corrispondenza biunivoca tra ciascuno di questi insiemi ed i rami "uscenti" dal corrispondente insieme di informazione è indicata graficamente semplicemente ponendo i nomi degli elementi di questi insiemi vicino ai rami "corrispondenti". Se anche qui vogliamo rispettare il formalismo per intero, possiamo dire che (limitandoci solo a $M_{II,1}$) la corrispondenza biunivoca assegna: per quanto riguarda i nodi uscenti da v_1, ad L il ramo d_3 e ad R il ramo d_4,; per quanto riguarda i nodi uscenti da v_2, ad L il ramo d_5 e ad R il ramo d_6.

Infine, abbiamo posto vicino ad ognuno dei nodi finali una coppia ordinata di numeri reali che rappresentano i valori che le funzioni di utilità (rispettivamente per il giocatore I e per II) assegnano all'esito finale associato a tale nodo finale.

Vediamo ora una definizione fondamentale, cioè la definizione di strategia, che ci permetterà di passare da un gioco in forma estesa ad un gioco in forma strategica (ovvero, al gioco in "forma normale", come si usa anche dire).

Definizione 3 *Una strategia per il giocatore $k \in N$ è una funzione che, per ogni insieme di informazione $Q_{k,j}$, seleziona un elemento di $M_{k,j}$.*

Quindi una strategia è una funzione $s : J_k \to \cup_{j\in J_k} M_{k,j}$ tale che $s(i) \in M_{k,i}$ per ogni $i \in J_k$.

Ad esempio, nel gioco mostrato in figura 1, abbiamo due strategie per I, che non sono altro che le due possibili funzioni definite su J_I (un singleton! Contiene il solo elemento 1) ed a valori in $M_{I,1}$ (che contiene due soli elementi: T e B). Abbiamo allora $s_1^I : J_I \to M_{I,1}$, ovvero $s_1^I : \{1\} \to \{T, B\}$, definita come $s_1^I(1) = T$; la seconda sarà naturalmente $s_2^I : \{1\} \to \{T, B\}$ definita come $s_2^I(1) = B$. Penso si capisca perché poi queste strategie siano semplicemente denotate come T e B rispettivamente.

Per quanto riguarda II, abbiamo $J_{II} = \{1, 2\}$, mentre è $M_{II,1} = \{L_1, R_1\}$ ed $M_{II,2} = \{L_2, R_2\}$.

Abbiamo quindi quattro diverse funzioni possibili (mi riferisco alla definizione di strategia) e quindi quattro strategie per II. Esse sono definite così (non indico tutti i dettagli formali; dovrebbe essere evidente quanto essi siano farraginosi):

$s_1^{II}(1) = L_1,\ s_1^{II}(2) = L_2$

$s_2^{II}(1) = L_1,\ s_2^{II}(2) = R_2$

$s_3^{II}(1) = R_1,\ s_3^{II}(2) = L_2$

$s_4^{II}(1) = R_1,\ s_4^{II}(2) = R_2$

A questo punto, possiamo scrivere la forma strategica del gioco di figura 1:

$I\backslash II$	s_1^{II}	s_2^{II}	s_3^{II}	s_4^{II}
s_1^I	$2,1$	$2,1$	$0,0$	$0,0$
s_2^I	$0,0$	$1,2$	$0,0$	$1,2$

Come abbiamo fatto? Semplice. Data una coppia di strategie abbiamo semplicemente applicato le "ricette" che esse descrivono, per vedere come sarebbe stato giocato il gioco se i giocatori avessero scelto quella coppia di strategie e, quindi, a quale nodo finale si sarebbe arrivati e di conseguenza quale sarebbe stato il payoff che i giocatori avrebbero ottenuto.

Preferisco, tuttavia, per ragioni di maggiore espressività, usare simboli meno "asettici" per descrivere le strategie di I e di II. La forma strategica sarà allora:

$I\backslash II$	L_1L_2	L_1R_2	R_1L_2	R_1R_2
T	$2,1$	$2,1$	$0,0$	$0,0$
B	$0,0$	$1,2$	$0,0$	$1,2$

basta notare come (ad esempio) R_1L_2 descrive evidentemente la strategia s_3^{II}.

La possibilità di passare, nel modo visto, dalla forma estesa alla forma strategica appare plausibile nel caso del giochino che abbiamo studiato in dettaglio. Vista comunque la complessità della definizione di gioco in forma estesa, dovremo contare su un qualche teorema il quale ci garantisca che siamo effettivamente in grado di ricostruire la forma strategica a partire da quella estesa. Vedremo infatti tra breve questo risultato, ma prima occupiamoci della trasformazione da gioco in forma estesa a gioco in forma strategica per il secondo esempio che abbiamo visto, quello descritto nella figura 2.

Per questo esempio, le strategie di I sono descritte in modo perfettamente analogo. Invece, per II abbiamo questa volta un solo insieme di informazione: $J_{II} = \{1\}$.

Abbiamo poi $M_{II,1} = \{L, R\}$ e quindi le funzioni possibili da J_{II} a $M_{II,1}$ sono solo due:
$s_1^{II}(1) = L$
$s_2^{II}(1) = R$

La forma strategica è allora:

$I \backslash II$	s_1^{II}	s_2^{II}
s_1^I	$2, 1$	$0, 0$
s_2^I	$0, 0$	$1, 2$

O, in maniera più espressiva:

$I \backslash II$	L	R
T	$2, 1$	$0, 0$
B	$0, 0$	$1, 2$

Passiamo finalmente al risultato generale che abbiamo preannunciato. Proveremo come un profilo di strategie $\hat{s} = (\hat{s}_i)_{i \in N}$ (cioè, la scelta di una strategia da parte di ciascuno dei giocatori) individui univocamente una *distribuzione di probabilità* sui payoff finali.

Si consideri un nodo finale z. Vi è[3] un unico cammino π che lo connette alla radice. Se lungo il cammino c'è un nodo x di P_i (cioè "pertinente" al

[3]Purché il nostro albero abbia almeno due nodi. D'altronde, se ha un solo nodo, nessuno gioca!

giocatore i) nel quale la strategia $\hat{s}_i$ specifica un ramo differente da quello, uscente da x, che sta sul cammino π, allora la probabilità associata da $\hat{s}$ a z è 0. Altrimenti, la probabilità associata da $\hat{s}$ a z è il *prodotto* delle probabilità con cui il ramo appartenente a π viene scelto in ogni nodo della sorte che si trova lungo π (se non ve ne sono, la probabilità assegnata da $\hat{s}$ a z è 1).

In realtà, se non vi sono mosse della sorte lungo il cammino π, il nodo finale è individuato con certezza[4]. Quindi, in un gioco senza mosse della sorte un profilo di strategie $\hat{s}$ individua univocamente un esito finale.

Una volta che abbiamo la forma "normale" del gioco, cioè dopo che abbiamo trasformato il gioco da forma estesa a forma strategica, possiamo anche parlare di strategie miste. Esse, tuttavia, non costituiscono alcuna novità, in quanto esse sono definite a partire dalla forma strategica. Una strategia mista per un giocatore non è altro che una probabilità sull'insieme delle sue strategie "pure" che sono appunto quelle che abbiamo definito in precedenza.

Più interessanti, in rapporto alla forma estesa di un gioco, sono le strategie "behavioural" ("comportamentali" è una traduzione possibile di questo termine, in attesa di una migliore ...). Per descrivere una strategia comportamentale dobbiamo avere a disposizione la forma estesa, in quanto esse corrispondono alla scelta, in ogni insieme di informazione, anziché di uno dei rami uscenti, una probabilità sull'insieme dei rami uscenti. E' intuitivamente evidente che una strategia comportamentale individua univocamente una strategia mista. Più interessante è il rapporto esistente nella direzione opposta. Kuhn, nel 1953, non solo ha dato la definizione di gioco in forma estesa che abbiamo usato qui, ma ha anche provato che, in un gioco a memoria perfetta, le strategie comportamentali sono "sufficienti". Più precisamente, il risultato di Kuhn garantisce che, data una strategia mista per un giocatore, è possibile trovare una strategia comportamentale tale che, fissate comunque le strategie miste degli altri giocatori, riproduce esattamente gli stessi esiti finali.

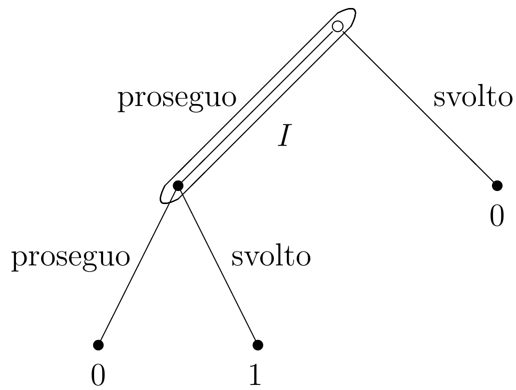
Un'altra definizione rilevante è quella di *sottogioco*. Si tratta di un sottoinsieme dei vertici dell'albero dato, con la proprietà che se un nodo appartiene a questo sottoinsieme, allora tutto l'insieme di informazione individuato da questo nodo vi appartiene. Ad esempio, il gioco di figura 1 ha tre sottogiochi: uno è lui stesso e gli altri due sottogiochi *propri* sono quelli "originantesi" rispettivamente in v_1 e v_2. Invece, il gioco di figura 2 non ha alcun sottogioco proprio.

---

[4]Si noti che per un decisore di von Neumann-Morgenstern un esito certo od uno con probabilità 1 pari sono.

2 Gioco di Isbell e giochi senza memoria perfetta

La definizione di gioco in forma estesa esclude situazioni come la seguente:



Il gioco descritto, detto "gioco di Isbell", viola la condizione che su un percorso da un vertice finale alla radice si possa trovare al più un nodo per ogni insieme di informazione. Anzi, è l'esempio più semplice che si possa fare! Il gioco di Isbell ha una proprietà interessante. Contrariamente a quello che succede nella classe dei giochi in forma estesa che è individuata dalla definizione standard, utilizzando strategie "comportamentali" è possibile ottenere risultati che non si possono ottenere mediante strategie miste.

Il gioco di Isbell (noto anche, nella letteratura recente di TdG, come il gioco dello "absent-minded ("drunk"?) driver") può essere descritto con una storiella.

Un guidatore un po' distratto, che sta viaggiando su una strada sterrata in una zona che non offre punti di riferimento esterni, per andare a casa deve svoltare al *secondo* bivio. Ma quando arriva ad un bivio, non ricorda se ne ha già passato uno oppure no.

Per via di questa smemoratezza, non riesce a distinguere tra i due nodi, e quindi può usare solo 2 strategie (ha un solo insieme di informazione e due mosse a disposizione):

- arrivato a un bivio, svolto
- arrivato a un bivio, proseguo

Ma in ogni caso guadagna 0!

Una strategia mista non fa altro che scegliere (secondo una ben precisa distribuzione di probabilità, determinata appunto dalla strategia mista utilizzata) una delle due strategie "pure" sopra descritte.

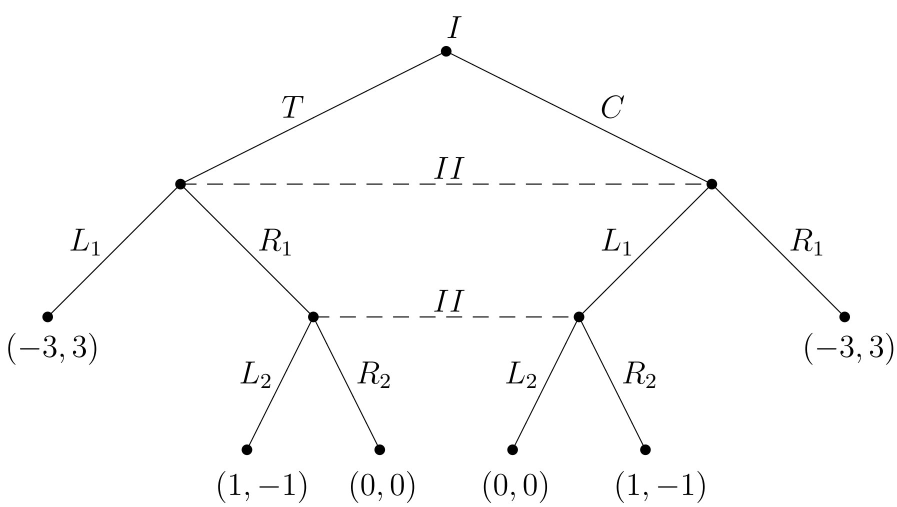
Il nostro giocatore-guidatore farebbe meglio ad usare la strategia "comportamentale" che prevede, ogni volta che gli tocca decidere, di svoltare con probabilità p (e proseguire con probabilità $1-p$). In particolare, per $p = 1/2$ egli ottiene un payoff atteso pari a $1/4$. Non c'è male, vero?

Si noti che l'esempio è il prototipo di situazioni oltremodo interessanti: basta immaginare che al posto del guidatore (brillo...) ci sia un automa a stati finiti. Se il suo compito e/o l'ambiente in cui lo deve svolgere sono sufficientemente complessi, si crea una situazione analoga.

Occupiamoci ora del seguente esempio, dedicato al problema della "memoria perfetta". Il giochino da cui si parte mi era stato segnalato (molto tempo fa!) da Giacomo Costa, di Pisa. E' l'autore, assieme a Pier Angelo Mori del "Costa-Mori", un libro di teoria dei giochi che vale la pena di leggere, in particolare se si è interessati alle applicazioni economiche.

Poi, mi ero divertito ad approfondire certi aspetti, quindi l'esempio è un po' cresciuto come mole ...

Il gioco, descritto in forma estesa, viola la condizione di essere a memoria perfetta. Vediamone una rappresentazione grafica.



La forma normale del gioco è la seguente:

$I \backslash II$	L_1L_2	L_1R_2	R_1L_2	R_1R_2
T	$-3, 3$	$-3, 3$	$1, -1$	$0, 0$
C	$0, 0$	$1, -1$	$-3, 3$	$-3, 3$

Si vede subito che non ci sono equilibri di Nash in strategie pure.

Si verifica facilmente che il profilo di strategie miste $((\bar{\lambda}, 1-\bar{\lambda}), (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3, \bar{\mu}_4)) = ((1/2, 1/2), (1/2, 0, 0, 1/2))$ è di equilibrio.

Si noti che $f((1/2, 1/2), (1/2, 0, 0, 1/2)) = -3/2$. Essendo un gioco a somma zero, $-3/2$ è il *valore* del gioco

Non ho controllato se ci siano altri equilibri

Passiamo alle strategie comportamentali

Sia:

-) p probabilità di L_1

-) q probabilità di L_2

La strategia comportamentale (p, q) induce la seguente strategia mista:

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (pq, p(1-q), (1-p), q, (1-p)(1-q))$$

Si verifica (facilmente) che non esistono p, q che ci diano la strategia mista $(1/2, 0, 0, 1/2))$ di equilibrio per II.

Infatti, il sistema seguente non ha soluzione:

$$\begin{cases} pq & = 1/2 \\ p(1-q) & = 0 \\ (1-p)q & = 0 \\ (1-p)(1-q) & = 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} 0 & = & 1/2 \\ p & = & 0 \\ \dots \\ \dots \end{cases} \text{VEL} \begin{cases} p & = & 1/2 \\ q & = & 1 \\ p & = & 1 \\ \dots \end{cases} \right)$$

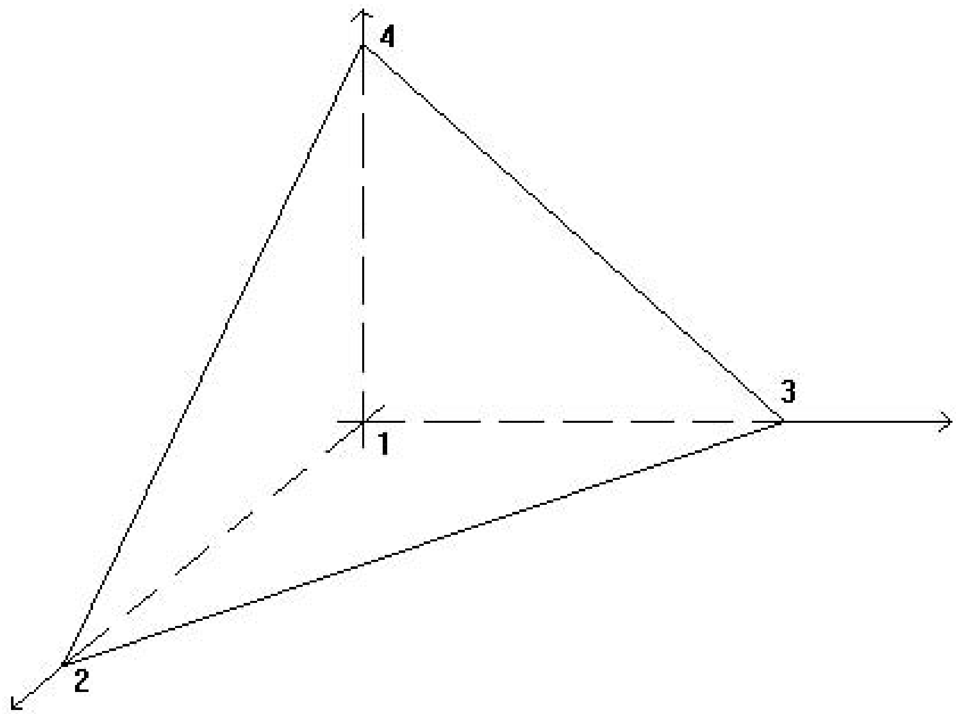
Il fatto che la strategia mista $(1/2, 0, 0, 1/2))$ non sia inducibile dalle strategie comportamentali, ci garantisce che l'immagine di $[0, 1] \times [0, 1]$ $((p, q) \in [0, 1] \times [0, 1])$ nel simplesso $0 \leq \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \leq 1 \quad \sum \mu_i = 1$ *non è un convesso* (si osservi che tutte le strategie pure sono ottenibili come strategie comportamentali).

Chi è l'immagine, allora?

Rappresento, per comodità, il simplesso di $\mathbb{R}^4$ nel modo seguente (anche se non è il migliore dei modi possibili). Posto:

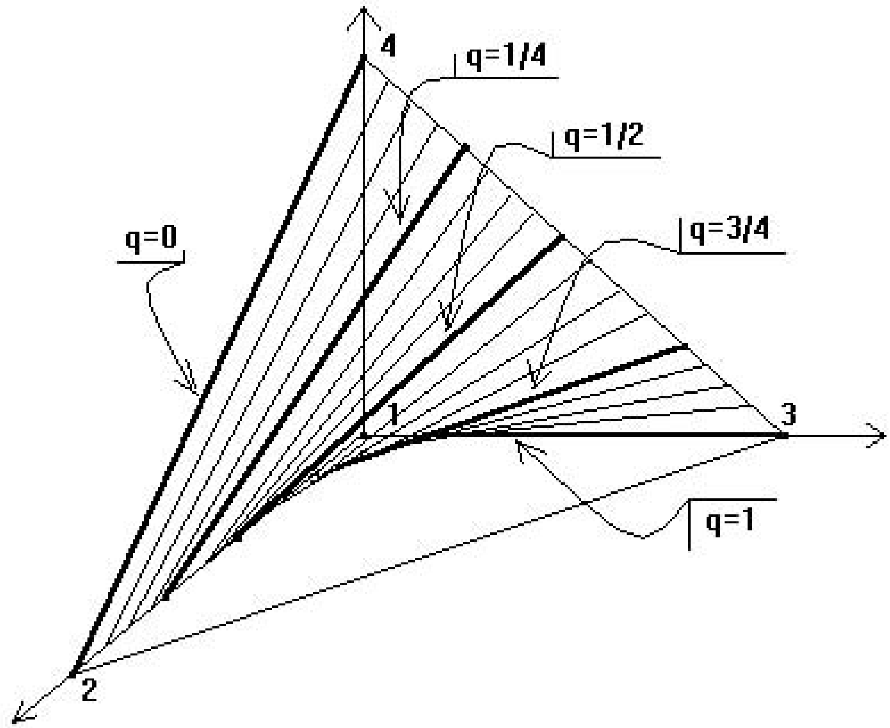
$$1 \equiv L_1 \ L_2 \qquad 2 \equiv L_1 \ R_2 \qquad 3 \equiv R_1 \ L_2 \qquad 4 \equiv R_1 \ R_2,$$

il simplesso è rappresentato come una piramide a base triangolare (di vertici 2, 3 e 4). Si tratta quindi di una rappresentazione deformata (è una trasformazione lineare del tetraedro che rappresenta il simplesso di $\mathbb{R}^4$), per via del fatto che gli angoli formati dalle facce in 1 sono diversi da quelli che si hanno negli altri vertici.



Per capire che superficie viene fuori, osservo che, se fisso per esempio la q, ottengo al variare di p la descrizione parametrica di un segmento. Pertanto la figura immagine è certamente una rigata (o, meglio, una porzione di rigata). Fissando alcuni valori "particolari" di q, ottengo una figura come quella che appare di seguito.

Notare che non è, come già notato, un convesso, però si tratta di un insieme che è omeomorfo (cioè topologicamente equivalente) ad un convesso compatto. Osservo questo perché saremo interessati ad un problema di punti fissi: ricordo che il teorema di Brouwer non richiede in modo essenziale la convessità, ma qualcosa di meno (e per esempio continua a valere per spazi topologici che siano omeomorfi ad un convesso compatto di $\mathbb{R}^n$).



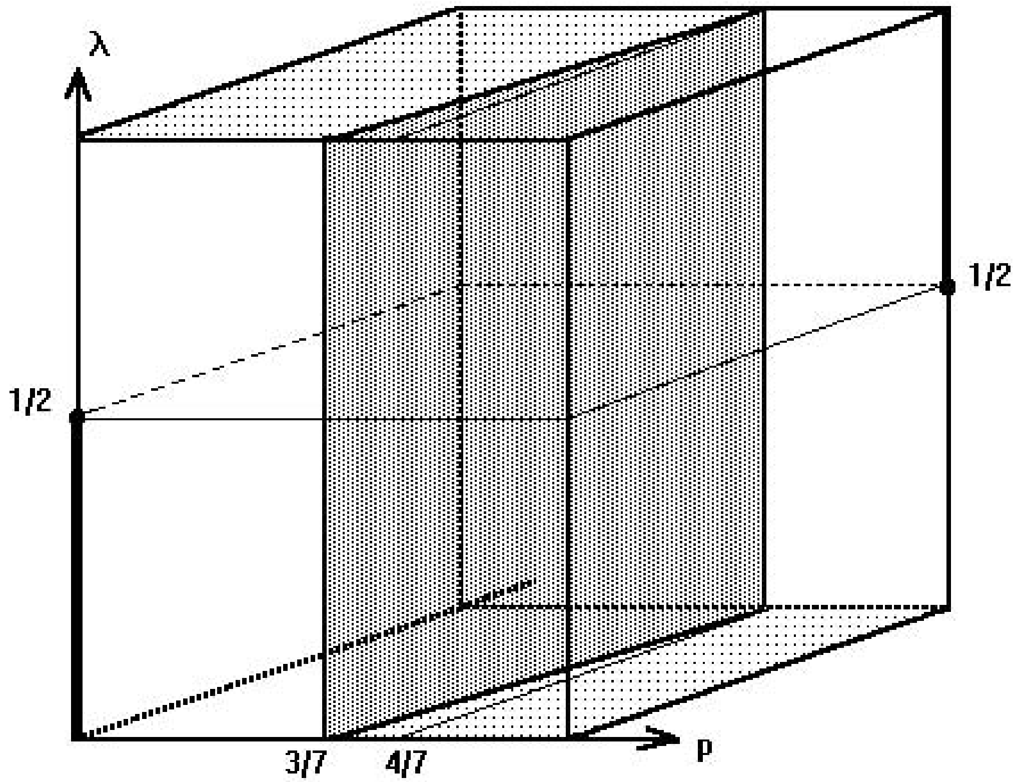
Si verifica che (indico con R_I la miglior risposta per il giocatore I, ed analogamente per l'altro):

$$R_I(p,q) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad q < 7p-3 \\ [0,1] & \text{se} \quad q = 7p-3 \\ 0 & \text{se} \quad q > 7p-3 \end{cases}$$

$$R_{II}(\lambda) = \begin{cases} (0,0) & \text{se} \quad \lambda < 1/2 \\ \{(0,0),(1,1)\} & \text{se} \quad \lambda = 1/2 \\ (1,1) & \text{se} \quad \lambda > 1/2 \end{cases}$$

Detta $R(\lambda,p,q) = (R_I(p,q), R_{II}(\lambda))$, c'è un $(\bar{\lambda},\bar{p},\bar{q})$ che sia punto fisso per R? Equivalentemente: i "grafici ridotti" di R_I ed R_{II} hanno intersezione non vuota?

Disegniamoli



Il grafico ridotto di R_{II} è molto calcato (è costituito da due segmenti verticali). Invece il grafico ridotto di R_I è ombreggiato (è costituito da tre porzioni piane: due orizzontali ed una verticale).

E' evidente che l'intersezione è vuota. E' anche "evidente" che il problema proviene dalla "mancanza di convessità" di R_{II}.

E questo fenomeno si verifica perché, fissato λ, la funzione che dobbiamo massimizzare (cioè il guadagno del giocatore II) si guarda bene dall'essere lineare in (p, q). Anzi, non è neanche quasi concava, cosa che sarebbe sufficiente.

3 Appendice: grafi ed alberi

Il concetto di grafo è importante: i grafi vengono usati spesso (eventualmente con elementi accessori) per rappresentare, modellizzare delle situazioni. In particolare i grafi *finiti*, dei quali soli ci occuperemo; nonostante questa restrizione, i grafi presentano un certo numero di insidie se non affrontati con la consueta precisione che è tipica della matematica.

Cominciamo col dare le definizioni principali.

Definizione 4 *Dicesi* grafo orientato semplice *una coppia ordinata* $G = (V, A)$*, dove* V *è un insieme ed* $A \subseteq V \times V$.

Gli elementi di V sono detti vertici (o anche nodi) e quelli di A archi del grafo.

Osservazione 2 *L'aggettivo "semplice" usato nella definizione serve per distinguere quanto abbiamo definito dai grafi "multipli". Dato che però ci occuperemo solo di grafi semplici, d'ora in poi ometteremo questo aggettivo. Si noti che la definizione 4 non si limita al solo caso dei grafi finiti. Tuttavia, d'ora in poi ci occuperemo solo di grafi finiti (ovverossia t.c.* V *è un insieme finito). Anche questo fatto verrà sottinteso. Quindi, quando parleremo di grafo (orientato) ci riferiremo ad un grafo (orientato)* semplice *e* finito*.*

Una definizione equivalente di grafo (finito, semplice, orientato) consiste nel definire il grafo come una coppia ordinata (V, F), con V un insieme (finito) ed $F :\to \mathcal{P}(V)$. L'idea che questa definizione formale incorpora è quella che per ogni vertice sono individuati gli "immediati successori", descritti mediante F. E' facile passare da una versione all'altra. Basta usare la seguente "regola di traduzione": $(v_1, v_2) \in A$ se e solo se $v_2 \in F(v_1)$.

Altre definizioni sono reperibili in letteratura (osservo come, ad esempio, vi sia una corrispondenza biunivoca tra grafi orientati e matrici di zeri ed uno: questa fatto è utile per il trattamento informatico dei grafi e naturalmente può essere usato per una "diversa" definizione di grafo). Tipicamente avviene che in un dato contesto viene adottata la definizione che è di più diretta ed immediata applicazione.

Esempio 1 *Sia* $V = \{RM, GE, MI, TO\}$*. E sia* $A = \{(RM, GE), (RM, MI), (GE, MI), (GE, TO)\}$*.* $G = (V, A)$ *è un grafo orientato.*

Esempio 2 *Sia* $V = \{RM, GE, MI, TO\}$*. E sia* $A = \emptyset$*.* $G = (V, A)$ *è un grafo orientato.*

Esempio 3 *Sia* $V = \emptyset$*. E sia* $A = \emptyset$*.* $G = (V, A)$ *è un grafo orientato.*

Esempio 4 *Sia* $V = \{1, 2, \dots, 10\}$*.*

$A = \{(v', v'') \in V \times V : v'$ *è un divisore di* $v''\}$*.* $G = (V, A)$ *è un grafo orientato.*

Esercizio 1 *Elencare esplicitamente tutti gli elementi di* A *del precendente esempio.*

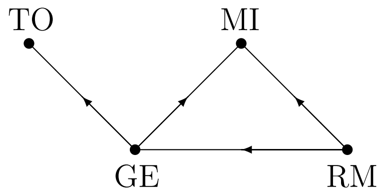


Figura 3: Un esempio di grafo orientato.

Esempio 5 *Si consideri la figura 3. Questa figura ovviamente* non è un grafo[5]. *Altrettanto ovviamente, però,* individua *un grafo orientato (mediante delle convenzioni così naturali che non vale neppure la pena di esplicitare). Per la precisione, il grafo dell'Esempio 1. Ovvero, i vertici sono* RM, GE, MI, TO. *E gli archi sono appunto* (RM, GE), (RM, MI), (GE, MI), (GE, TO). *Se diamo naturalmente per scontato che le frecce indichino coppie ordinate di vertici il cui primo elemento è quello che sta dalla parte della "coda" della freccia, mentre il secondo è quello che sta dalla parte della punta.*

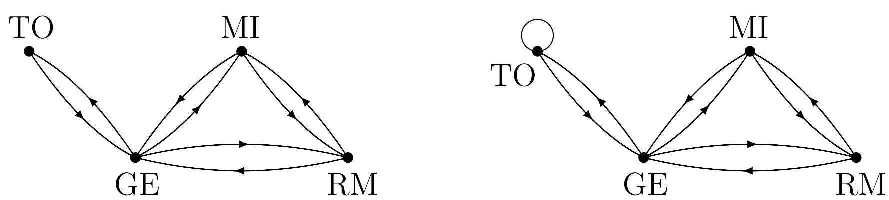


Figura 4: Altri esempi di grafi orientati.

Esempio 6 *Si consideri la figura 4. Sono rappresentati due esempi di grafi orientati. Nel disegno di destra è presente un "loop", o "cappio".* Non *è stata posta una freccia su di esso, in quanto esso rappresenta l'elemento* (TO, TO), *che evidentemente non può essere distinto da* (TO, TO)....

Definizione 5 *Dicesi* grafo non orientato semplice *una coppia ordinata* $H = (V, D)$, *dove* V *è un insieme ed* $D \subseteq \mathcal{P}_2(V)$. *Dove con* $\mathcal{P}_2(V)$ *indichiamo*

[5] Stando, ovviamente, alla Definizione 4. Si noti che, però, in base a certe definizioni date su alcuni libri, lo sarebbe

l'insieme di tutti i sottoinsiemi di V che contengono esattamente due elementi.
Gli elementi di V sono detti vertici e quelli di D lati (o spigoli) del grafo.

Osservazione 3 *Anche nel caso dei grafi non orientati ci occuperemo solo di quelli semplici e finiti (cioè con V finito): ometteremo pertanto queste specificazioni.*

In un grafo non orientato, un lato è un sottoinsieme di V che contiene esattamente due elementi, cioè due vertici distinti. Chiameremo questi vertici "estremi" del lato.

Esempio 7 *Sia $V = \{RM, GE, MI, TO\}$. E sia:*
$D = \{\{RM, GE\}, \{RM, MI\}, \{GE, MI\}, \{GE, TO\}\}$.
$H = (V, D)$ è un grafo non orientato semplice.

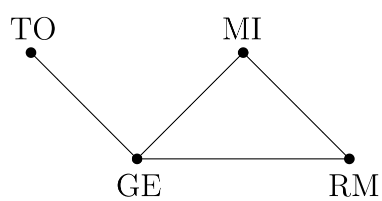


Figura 5: Un esempio di grafo non orientato.

Esempio 8 *Per la figura 5 valgono considerazioni analoghe a quelle fatte a proposito della figura 3 nell'esempio 6. Essa individua il grafo non orientato dell'Esempio 7.*

Questo grafo non orientato corrisponde anche (in modo ovvio) al grafo disegnato a sinistra nella figura 4. Non possiamo invece rappresentare come grafo non orientato quello disegnato a destra in figura 4, in quanto dalla nostra definizione di grafo non orientato sono esclusi i cappi.

Osservazione 4 *La terminologia in teoria dei grafi è molto varia. Occorre fare attenzione, se si legge un libro sui grafi, a quali siano le definizioni adottate. Si noti che, ad esempio, per i grafi non orientati si può trovare detto che è (V, D), dove D è un insieme di coppie non ordinate di V. In questo caso, si può avere che la coppia non ordinata $[\bar{v}, \bar{v}]$ appartenente a D, dove ovviamente $\bar{v} \in V$. Questi tipi di coppie vengono detti "cappi". Questo* non *è ammesso invece nella Definizione data qui, per cui i nostri grafi non orientati saranno privi di "cappi". Va da se che non si può dire quale sia la definizione "migliore". Ed anche che è facile passare da un linguaggio ad un altro. Purché si sia consapevoli di quale è il linguaggio usato!*

La definizione di coppia non ordinata può essere data a partire da quella di coppia ordinata. E' sufficiente introdurre su $V \times V$ una relazione di equivalenza:

$$(v_1, v_2) \sim (v_3, v_4) \;\text{ se e solo se }\; ((v_1, v_2) = (v_3, v_4) \text{ VEL } (v_1, v_2) = (v_4, v_3))$$

una coppia non ordinata è un elemento dello spazio quoziente $V/\sim$. Questa definizione è chiaramente dietro alla identificazione fra il grafo orientato a sinistra in figura 4 e quello non orientato di figura 5. Essa permette però anche di considerare grafi non orientati con cappi e quindi ci permetterebbe di associare un grafo non orientato anche al grafo di destra in in figura 4.

Noi ci atterremo comunque alla definizione 5. Quindi, niente cappi.

Definizione 6 *Sia $G = (V, A)$ un grafo orientato. Una n-pla di vertici $(v_1, \dots, v_n)$ si dice cammino orientato (o circuito) se $(v_i, v_{i+1}) \in A$ per ogni $i = 1, \dots, n-1$.*

Definizione 7 *Sia $H = (V, D)$ un grafo non orientato. Una n-pla*[6] *di vettori $(v_1, \dots, v_n)$ si dice* catena *(o* cammino*) se $\{v_i, v_{i+1}\} \in D$ per ogni $i = 1, \dots, n-1$.*

Se nessun lato *è ripetuto (cioè se $\{v_i, v_{i+1}\} \neq \{v_k, v_{k+1}\}$ per $i, k = 1, \dots, n-1$, $i \neq k$), diremo che è un cammino* semplice.

Se invece nessun vertice *è ripetuto (cioè se $v_i \neq v_j$ per $i \neq j$), diremo che il cammino è* elementare.

Un cammino per cui $v_1 = v_n$ viene detto ciclo. *Se il cammino era semplice, diremo che il ciclo è semplice. Se il cammino era elementare (nel senso che i suoi vertici sono tutti distinti, con l'ovvia eccezione di quello iniziale e finale), diremo che il ciclo è elementare.*

Definizione 8 *Sia $H = (V, D)$ un grafo non orientato. Diremo che H è connesso se per ogni $v_i, v_j \in V$ con $v_i \neq v_j$ esiste un cammino di estremi v_i e v_j (cioè esiste un cammino $(v_1, \dots, v_n)$ t.c. $v_1 = v_i$ e $v_n = v_j$).*

---

[6] Ovviamente sarà $n \geq 1$, ma poiché la nostra definizione esclude i "cappi", deve essere almeno $n \geq 2$.

Definizione 9 *Sia $H = (V, D)$ un grafo non orientato. Diremo che H è un* albero *se:*

- *è connesso*
- *è privo di cicli semplici.*

Osservazione 5 *Una definizione equivalente di albero è quella di un grafo non orientato tale che, per ogni coppia di vertici distinti, vi sia uno ed un solo cammino elementare che li connette.*

Non proveremo l'equivalenza di questa definizione, ma l'idea dovrebbe essere chiara: se non ci sono cicli e' impossibile congiungere due vertici distinti in due modi diversi. E viceversa.

Si può anche dimostrare che il numero dei lati di un albero è pari al numeri dei nodi meno 1.

Esempio 9 *La figura 6 descrive (con le solite precisazioni, vedi esempio 6) un paio di grafi non orientati, che sono alberi.*

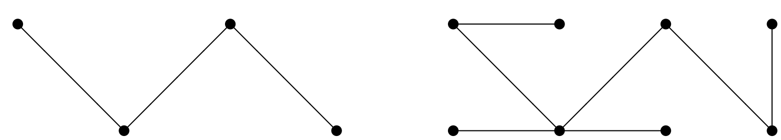


Figura 6: Un paio di alberi.

Definizione 10 *Dicesi* albero con radice *una coppia ordinata $(T, \bar{v})$, dove $T = (V, D)$ è un albero e dove $\bar{v} \in V$.*

Esempio 10 *I disegni di figura 7 individuano tre* distinti *alberi con radice, ma lo* stesso *albero.*

E' abbastanza facile immaginare come, dato un albero con radice $R = (T, \bar{v})$, si possa indurre un "ordinamento" sui lati di T in modo da convertirlo, da grafo non orientato, a grafo orientato in modo che le "frecce" vadano dalla radice verso le "foglie". Tale grafo orientato è individuato univocamente[7].

[7]Naturalmente potremmo anche individuare un altro grafo orientato, semplicemente "rovesciando" le frecce.

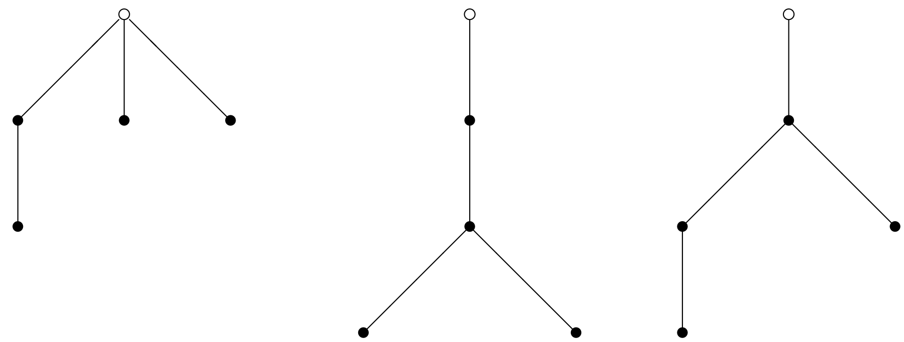


Figura 7: Tre alberi identici, ma diversi come alberi con radice.

Formalmente, possiamo procedere così. Tenendo conto delle osservazioni fatte dopo la definizione 9, abbiamo che per ogni nodo[8] di un albero con radice vi è uno ed un solo cammino elementare che lo connette con la radice. Ciò ci permette di introdurre un ordine sui vertici di T: dati $x, y \in T$, diremo che y "segue" x se il nodo x si trova sul cammino elementare che congiunge y alla radice.

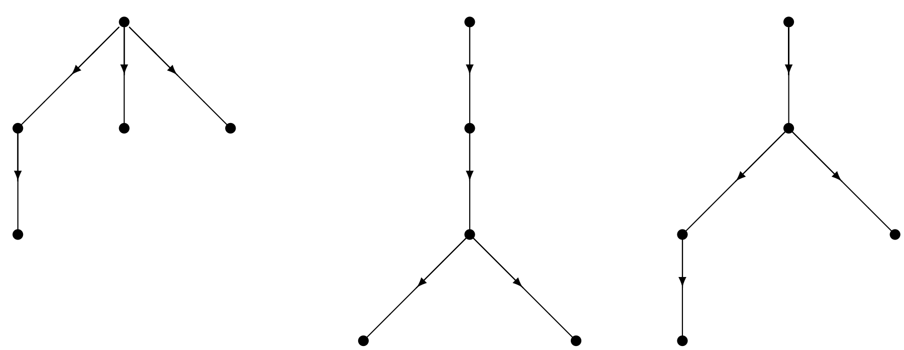


Figura 8: Tre alberi con radice visti come grafi orientati.

Esempio 11 *La figura 8 mostra gli alberi con radice di figura 7, trasformati in grafi orientati usando la procedura appena descritta.*

[8]Diverso dalla radice.

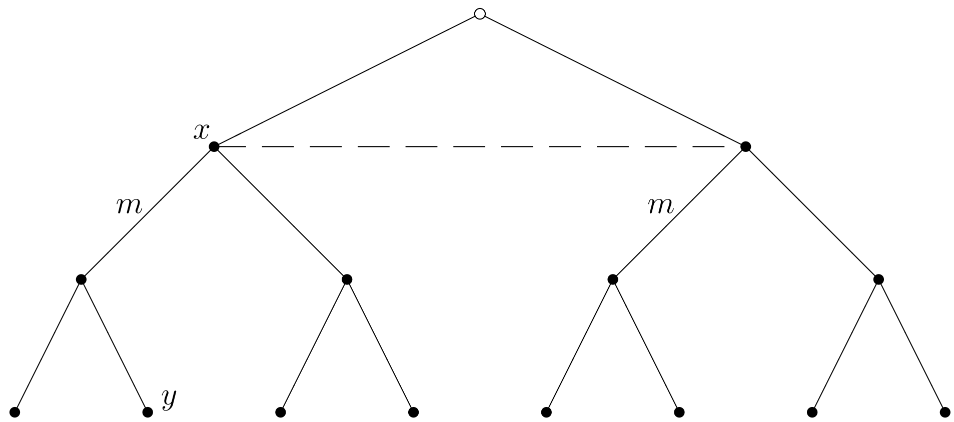


Figura 9: Un esempio per illustrare il fatto che "y segue x ed m"

Osserviamo infine esplicitamente quanto segue, in quanto ci riferiamo ad aspetti degli alberi con radice che sono stati citati nel corso della formalizzazione dei giochi in forma estesa.

Abbiamo definito cosa voglia dire che un nodo y "segue" un nodo x. Se y "segue" x, diremo anche che y "segue" x ed il ramo l, se il ramo l fa parte del cammino elementare che congiunge y con x.

Dato un nodo x, diremo poi che un ramo, il quale abbia x come uno dei suoi estremi, è "uscente" da x se fa parte di un cammino elementare che connette x con un nodo y che "segue" x. Si noti che, in un albero con radice, per ogni suo nodo x che non sia la radice, vi è esattamente un ramo avente x come estremo, che non sia "uscente" da x: tutti gli altri (ce ne sono se e solo se x non è terminale), sono "uscenti".

Dato un nodo di un albero con radice, esso è un nodo terminale se non vi è alcun altro nodo che lo "segue".

Poiché, in un gioco in forma estesa, una scelta m (una "mossa" m) effettuata in un dato insieme di informazione individua un ramo dell'albero per ogni nodo dell'insieme di informazione, possiamo dire che y "segue x ed m" se m è una mossa che può essere effettuata in un insieme di informazione $Q_{k,j}$ (cioè, se $m \in M_{k,j}$) cui appartiene il nodo x e se il ramo l "uscente" da x che tale mossa individua fa parte del cammino elementare che connette y con x (in parole povere, se y "segue" x ed il ramo l).

4 Appendice dell'appendice: ulteriori nozioni sui grafi

Problema 1 *I due disegni di figura 10 individuano lo stesso grafo?*

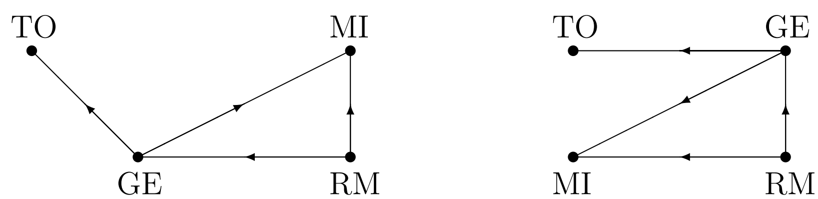


Figura 10: Figura per il problema 1.

Definizione 11 *Siano $G_1 = (V_1, A_1)$ e $G_2 = (V_2, A_2)$ due grafi orientati. Se esiste una corrispondenza biunivoca $\phi : V_1 \to V_2$ t.c.:*

$$\forall v', v'' \in V_1[(v', v'') \in A_1 \iff (\phi(v'), \phi(v'')) \in A_2],$$

allora i due grafi si dicono isomorfi.

Osservazione 6 *Nell'insieme $\mathcal{G}$ di tutti i grafi orientati finiti, la relazione di isomorfismo è una relazione di equivalenza (verifica facile). Una classe di equivalenza viene detta* grafo *orientato (semplice, finito)* astratto.

Problema 2 *I grafi della figura 11 sono isomorfi?*

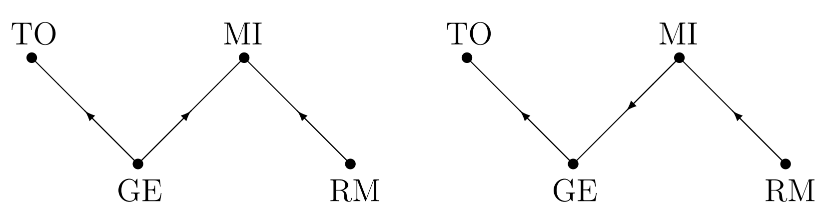


Figura 11: Due grafi per il problema 2.

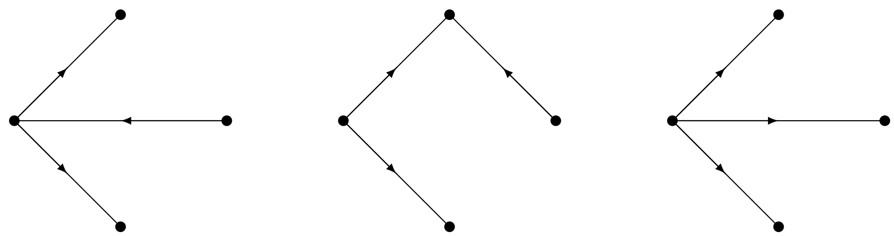


Figura 12: Tre grafi per l'esercizio 2.

Esercizio 2 *Provare che i grafi orientati individuati dalla figura 12 non sono isomorfi.*

Esercizio 3 *Quanti sono i grafi orientati astratti con 3 vertici? E quelli con 4?*

Osservazione 7 *Anche per i grafi non orientati si può ovviamente parlare di grafi non orientati astratti. Al lettore il compito di fornire la definizione, se lo desidera.*

Problema 3 *Definire una opportuna nozione di isomorfismo tra alberi con radice. I tre alberi con radice della figura 7 individuano lo stesso albero con radice astratto?*

Problema 4 *I grafi orientati individuati nella figura 13 sono isomorfi?*

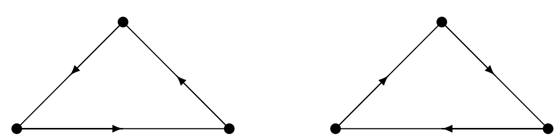


Figura 13: Due grafi per il problema 4.