1 Modello di contrattazione di Nash

Formalizziamo il problema di contrattazione. Indichiamo con $\mathcal{B}$ l'insieme dei problemi di contrattazione dei quali ci occupiamo. Gli elementi di $\mathcal{B}$ sono coppie (S, d), dove:

1. S è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, chiuso e convesso

2. $d = (d_1, d_2) \in S$

3. $S \cap \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : u_1 \geq d_1 \text{ e } u_2 \geq d_2\}$ è non vuoto e limitato.

L'insieme $\{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : u_1 \geq 0 \text{ e } u_2 \geq 0\}$ verrà indicato come $\mathbb{R}^2_{\geq}$ (useremo anche il simbolo $\mathbb{R}^2_{>}$ per indicare $\mathbb{R}^2_{\geq} \setminus \{(0, 0)\}$), pertanto $\{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : u_1 \geq d_1 \text{ e } u_2 \geq d_2\} = d + \mathbb{R}^2_{\geq}$ e quindi possiamo anche scrivere $S \cap (d + \mathbb{R}^2_{\geq})$ anziché $S \cap \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : u_1 \geq d_1 \text{ e } u_2 \geq d_2\}$.

Per quanto riguarda l'interpretazione, essa dovrebbe essere evidente: S rappresenta l'insieme di tutte le coppie di valori di utilità ai quali i due giocatori possono pervenire, e $d = (d_1, d_2)$ rappresenta il "punto di disaccordo", cioè il valore che i giocatori possono ottenere in caso di mancato raggiungimento di un accordo. Se in S c'è un elemento (u_1, u_2) con $u_1 > d_1$ e $u_2 > d_2$, allora il problema di contrattazione (S, d) viene detto *essenziale*.
Per *soluzione* del problema di contrattazione (relativamente alla classe $\mathcal{B}$ sopra individuata) intendiamo una applicazione $\Phi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^2$. L'idea è che ad ogni (S, d) siamo in grado di associare (univocamente!) una coppia $\Phi(S, d) = (\Phi_1(S, d), \Phi_2(S, d))$ che rappresenti, in termini interpretativi, i valori di utilità assegnati rispettivamente ai due giocatori.
Come definire questa Φ?
L'approccio seguito da Nash non è stato quello di definire "a priori" Φ. Ma di imporre condizioni "ragionevoli" che ogni soluzione Φ dovrebbe soddisfare. E poi di provare che c'è una ed una sola $\Phi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^2$ che soddisfa tali condizioni.
Queste condizioni sono le seguenti:

1. **Efficienza forte**: $\Phi(S, d) \in S$ ed è un ottimo paretiano forte per S. Cioè, non esiste alcun elemento in S, distinto da $\Phi(S, d)$, che abbia entrambe le coordinate maggiori o uguali di $\Phi(S, d)$.

2. **Razionalità individuale**: $\Phi_1(S, d) \geq d_1$ e $\Phi_2(S, d) \geq d_2$

3. **Simmetria**: Se $d_1 = d_2$ e se $(u_1, u_2) \in S \Leftrightarrow (u_2, u_1) \in S$, allora $\Phi_1(S, d) = \Phi_2(S, d)$

4. **Co-varianza rispetto a cambiamenti di scala**: Per ogni $\lambda_1, \lambda_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, siano:

   $$S' = \{(\lambda_1 u_1 + \gamma_1, \lambda_2 u_2 + \gamma_2) : (u_1, u_2) \in S\} \text{ e } d' = (\lambda_1 d_1 + \gamma_1, \lambda_2 d_2 + \gamma_2)$$

   Allora
   $$\Phi(S', d') = (\lambda_1 \Phi_1(S, d) + \gamma_1, \lambda_2 \Phi_2(S, d) + \gamma_2)$$

5. **Indipendenza dalle alternative irrilevanti**: Siano dati $(S, d), (S', d) \in \mathcal{B}$, tali che $S' \subseteq S$. Se $\Phi(S, d) \in S'$, allora $\Phi(S, d) = \Phi(S', d)$

Osservazione. Si noti che, nella condizione di indipendenza dalle alternative irrilevanti, la condizione $(S', d) \in \mathcal{B}$ implica che $d \in S'$.

Si può allora enunciare il seguente:

Teorema 1 (Nash, 1950) *C'è una ed una sola soluzione Φ, definita su $\mathcal{B}$, che soddisfa le condizioni 1), ..., 5). Inoltre, se (S, d) è essenziale, si ha che:*

$$\Phi(S, d) = \text{argmax}\{(u_1 - d_1) \cdot (u_2 - d_2) \ : \ (u_1, u_2) \in S \cap (d + \mathbb{R}^2_{\geq})\}$$

Con "argmax" indichiamo l'insieme dei punti di massimo della funziona data $((u_1 - d_1) \cdot (u_2 - d_2))$ sull'insieme dato $(S \cap (d + \mathbb{R}^2_{\geq}))$.

Si noti che le ipotesi fatte ci garantiscono che $S \cap (d + \mathbb{R}^2_{\geq})$ sia non vuoto, chiuso e limitato (ciò vale sia se il problema è essenziale sia se non lo è); la funzione $(u_1 - d_1) \cdot (u_2 - d_2)$ è una funzione continua (è un polinomio di secondo grado!) e pertanto il teorema di Weierstrass ci garantisce che il problema di massimo indicato abbia soluzione e quindi lo "argmax" è un insieme non vuoto.

Se poi il problema è anche essenziale, la convessità di S (e quindi di $S \cap (d + \mathbb{R}^2_{\geq})$) e la stretta quasi-concavità[1] della funzione $(u_1 - d_1) \cdot (u_2 - d_2)$ su $S \cap (d + \mathbb{R}^2_{>})$ ci garantiscono che il punto di massimo sia unico, ovvero che l'argmax sia un singleton.

---

[1] Una funzione $f : C \to \mathbb{R}$, dove $C \subseteq \mathbb{R}^k$ è convesso, è detta strettamente quasi concava se:

$$\forall c_1, c_2 \in C, \text{ con } c_1 \neq c_2, \quad \forall \lambda \in]0, 1[, \quad f(\lambda c_1 + (1 - \lambda) c_2) > \min\{f(c_1), f(c_2)\}.$$

2 Kalai e Smorodinski

Kalai e Smorodinski sostituiscono l'ipotesi di Indipendenza dalle Alternative Irrilevanti con una condizione detta di "Monotonia Individuale" (o anche "Monotonia Ristretta").

Per descrivere questa condizione abbiamo bisogno dello "utopia point" per (S, d). Definiamo b_1 come il valore massimo di u_1 su $S \cap (d + \mathbb{R}^2_{\geq})$, ed analogamente b_2 (valore massimo di u_2 su $S \cap (d + \mathbb{R}^2_{\geq})$). Il punto $b = (b_1, b_2)$ viene detto "utopia point" per (S, d). Si noti che normalmente b non apparterrà ad S.

La condizione introdotta da Kalai e Smorodinski è la seguente:

Proprietà di Monotonia Individuale (o Ristretta). Siano dati $(S, d), (S', d) \in \mathcal{B}$, tali che $S' \subseteq S$. Se $b_1(S, d) = b_1(S', d)$, allora si ha $\Phi_2(S', d) \leq \Phi_2(S, d)$. Se $b_2(S, d) = b_2(S', d)$, allora si ha $\Phi_1(S', d) \leq \Phi_1(S, d)$.

Kalai e Smorodinski hanno provato che esiste ed è unica Φ che soddisfa le condizioni **1, 2, 3, 4** e la **Proprietà di Monotonia Individuale**. Inoltre, questa soluzione è data (per un problema di contrattazione essenziale) dall'unico punto efficiente di S che si trova sul segmento che congiunge d con b.

Osservazione finale. Sia per la soluzione di Nash che per la soluzione di Kalai e Smorodinski, la soluzione di un problema di contrattazione non essenziale è determinata dalla condizione di efficienza paretiana forte. Si noti che in un problema di contrattazione non essenziale l'insieme dei punti di S che soddisfano la condizione di razionalità individuale, ovvero $S \cap (d + \mathbb{R}^2_{\geq})$, è banalmente un segmento orizzontale o verticale (eventualmente anche ridotto ad un unico punto!).