0 Ultimatum, ultimatum e poi ancora ultimatum...

Abbiamo visto il modello di ultimatum game. In particolare, nel caso in cui le proposte siano limitate alle spartizioni di 100 euro che vanno da $(1, 99)$ a $(99, 1)$. Questo gioco (in forma estesa, ad informazione perfetta) ha un unico equilibrio perfetto nei sottogiochi che prevede che I proponga $(99, 1)$ e che II accetti in ogni nodo la proposta di I, tra cui in particolare quella appena specificata. Per cui il payoff derivante dal SPE è 99 per I e 1 per II.

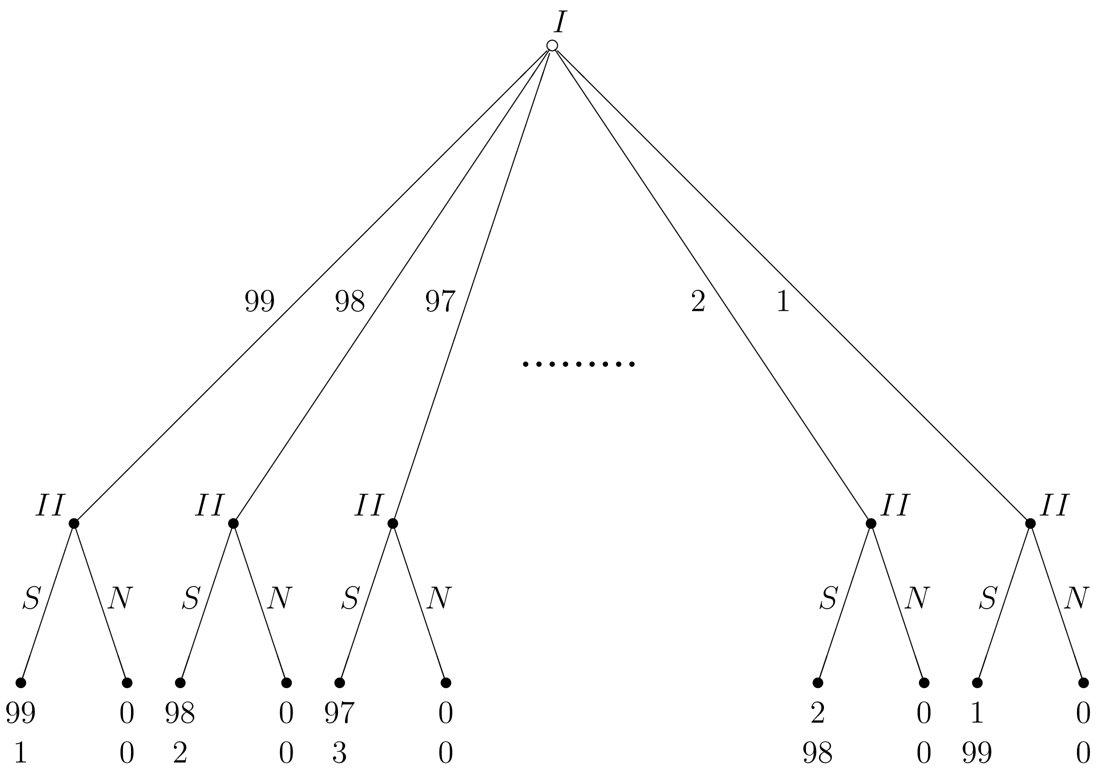

Figura 1: L'ultimatum game

E' interessante considerare cosa possa capitare quando l'ultimatum game, anziché finire con il payoff $(0, 0)$ nel caso di risposta N da parte di II continui con un nuovo "turno" di ultimatum game, ma questa volta a parti rovesciate: sarà II a fare una proposta di spartizione e sarà I a dover dire se accetta o no.

Osserviamo che è facilissimo determinare gli SPE (vi è un unico SPE). Basta osservare che al secondo stadio (se raggiunto), siamo di fronte al solito ultimatum game, semplicemente a parti invertite. Quindi I ad ogni nodo sceglierà S e quindi in particolare di fronte alla proposta $(1, 99)$ (cioè quella in cui II propone di tenere per se 99 euro). Ne segue che la proposta che II fa nel secondo stadio è appunto $(1, 99)$. Dall'analisi di quello che avviene al secondo stadio si deduce subito che II nel primo stadio rifiuterà tutte le proposte di spartizione di I, eccezion fatta per quella che prevede 99 euro per II (ed 1 per I). Perché ovviamente II, se non "soddisfatto" dalla proposta di I, preferisce passare al secondo turno dove ottiene quasi tutto. Risultato: I effettuerà la proposta iniziale $(1, 99)$ che verrà subito[1] accettata da II.

Come si vede, la situazione si è completamente rovesciata. E così continua aggiungendo ulteriori turni di offerte ed accettazione/non accetazione. Chi dei due giocatori si trova a fare per ultimo la proposta è quello che ottiene i 99 euro.

Al di là del fatto che questo risultato possa essere sorprendente, vale la pena di sottolineare un aspetto: il carattere "oscillatorio" del payoff di equilibrio che è $(99, 1)$ oppure $(1, 99)$ a seconda che il numero di "turni" sia dispari oppure pari. C'è modo di "ovviare" a questo "inconveniente"?

I modi sono molti. Noi ne vediamo uno, che consiste nella introduzione di un numero infinito di "turni". Così facendo, si crea però un problema sia formale che di sostanza sulla assegnazione dei payoff. Sembra ragionevole assumere che i due giocatori "scontino" le somme ottenute, qualora il tempo da attendere prima che queste entrino in loro possesso sia non più trascurabile.

Faremo questa estensione nel paragrafo seguente (il modello di Rubinstein di "offerte" e "contro-offerte" non è altro che un alternarsi di ultimatum games). Vediamo, in chiusura di questo paragrafo introduttivo, cosa avvenga qualora si introduca il fattore di sconto nell'ultimatum game a due stadi. Questo ci dovrebbe aiutare a comprendere la "ratio" del risultato di Rubinstein.

Cosa succede nell'ultimatum game ripetuto due volte, con un fattore di sconto? Osservo che in questo caso l'unico fattore di sconto che interessa è quello di II. Infatti la scelta di I all'ultimo nodo è sempre quella di accettare, indipendentemente da qualsiasi fattore di sconto (si tratta sempre di scegliere fra una somma positiva ed una nulla). Ciò che è importante è la seguente osservazione:

II **accetterà la proposta di** I **al primo stadio se e solo se quanto gli viene proposto "ora" è meglio di quello che lui riuscirà ad**

[1]Si noti che la CK dei parametri del gioco e della razionalità dei giocatori ha l'effetto che il gioco termina subito. A meno che non convenga nel SPE, non vi è ragione, date queste assunzioni, ad "esplorare" o ad "attendere".

ottenere "domani", ovviamente *scontato.*

Visto che lui "domani" otterrà tutta la somma possibile, basta sapere a quanto equivale scontata. Nell'esempio in figura 2, si suppone per comodità che le spartizioni possibili siano $(900, 100)$, $(800, 200)$, ..., $(100, 900)$. Se il fattore di sconto per II è 0.3 (può sembrare eccessivo, lo ammetto, ma vorrei osservare che nessuno ha mai detto quanto tempo passa fra un turno ed un altro...), allora i 900 euro di "domani" sono equivalenti per II a 270 "ora". E allora II accetterà la proposta di spartizione $(700, 300)$ (e tutte le migliori, mentre rifiuterłe proposte di spartizione a lui meno faverovoli). Per I, la strategia ottimale a questo punto non è altro che proporre $(700, 300)$.

Analoghi calcoli mostrano che, se il fattore di sconto è pari a 0.9, allora a II toccherà 900, che è esattamente la somma che lui otteneva senza considerare il fattore di sconto (il fatto che il fattore di socnto non abbia alcun effetto sul payoff risultante dal SPE è banalmente dovuto alla discretizzazione del problema, che è stata fatta in modo molto grossolano).

Lascio volentieri al lettore immaginare cosa succeda con tre stadi (stavolta interesseranno i fattori di sconto di entrambi). Rinvio inoltre, chi fosse interessato, a Binmore per una trattazione analoga che mostra cosa avviene senza la discretizzazione dei payoff.

1 Modello di contrattazione di Rubinstein

Questo modello rappresenta una situazione di contrattazione a stadi successivi e viene rappresentato con un gioco in forma estesa a informazione perfetta. L'interesse di questo modello è che gli equilibri perfetti nei sottogiochi, pur se non unici, danno comunque tutti lo stesso payoff ai giocatori, e questi payoff possono essere messi in relazione con i payoff previsti dal modello di Nash. Viene così fornita una "fondazione non-cooperativa" alla soluzione (cooperativa) di Nash.

La procedura è una procedura di offerte alternate ed è descritta introducendo la variabile tempo, che assume valori interi non negativi.

Si tratta di dividere una somma, per esempio un euro.

All'inizio il giocatore I fa una proposta di divisione al tempo 0. Il giocatore II può accettarla o respingerla. Se II accetta finisce il gioco, altrimenti si passa al periodo 1 in cui è il giocatore II che fa la proposta. Se I accetta il gioco è finito, altrimenti si passa allo stadio 2 e così via. Non c'è limite al numero di turni.

Si vede chiaramente che si tratta di un alternarsi di "ultimatum game", con scambio di ruoli fra I e II ad ogni stadio. Specifichiamo ora la descrizione formale.

I giocatori sono 2: I e II. Supponiamo che debbano dividersi un euro. I due giocatori fanno, alternativamente, delle proposte di spartizione, che l'altro può accettare (nel qual caso il gioco finisce, avendo come esito ovviamente la spartizione che è stata accettata), oppure rifiutare. Se un giocatore rifiuta, tocca all'altro fare una proposta, e così via. Ad ogni turno, l'insieme delle possibili proposte di spartizione verrà identificato con l'intervallo $X = [0, 1]$, nel senso che $x \in [0, 1]$ rappresenterà una proposta di spartizione nella quale il giocatore I prende x e il giocatore II prende $1-x$. Per rendere più "leggibile" il tutto, useremo la lettera y per indicare proposte fatte dal giocatore II, ma $y \in [0, 1]$ rappresenta comunque sempre una proposta di spartizione in cui spetta y al giocatore I ed $1 - y$ al giocatore II; si userà, se necessario, anche la lettera z quando non si voglia puntare l'attenzione su nessuno dei due giocatori in particolare. Si noti, non consideriamo proposte di spartizione che "lascino sul tavolo" qualcosa. Si noti anche che la storia passata del gioco non ha alcuna influenza su quello che è l'insieme delle possibili proposte (ad esempio, se I propone ad un turno $1/3$, il che vorrebbe dire che propone di lasciare $2/3$ a II, in un turno successivo I può benissimo proporre $2/3$, ovvero di lasciare a II solo $1/3$).

Questo gioco è un gioco infinito. In particolare, vi sono possibili percorsi infiniti che si snodano dalla radice. E' anche facile immaginare come possa ottenersene uno: basta pensare alla coppia di strategie in cui ciascuno dei giocatori rifiuta sempre qualunque proposta. Queste strategie sono ammissibili e naturalmente danno luogo ad una durata infinita del gioco (cosa che associeremo alla soluzione di "rottura", ovvero al "disagreement point"). Come si fa normalmente nei giochi infiniti, questi "percorsi infiniti", che sono massimali (cioè non "allungabili") possono svolgere il ruolo di "nodi finali". Non si tratta altro che osservare come nei giochi finiti[2] vi sia una corrispondenza biunivoca fra nodi terminali e percorsi (dalla radice) massimali. Nel caso dei giochi infiniti, possiamo sostituire la nozione di "nodo terminale" con quella di percorso massimale. Così facendo, abbiamo una nozione che estende quella "naturale" del caso finito anche al caso di giochi infiniti.

Dato il contesto, è regionevole associare ad ognuno di questi percorsi massimali un payoff nullo per entrambi i giocatori (sto assumendo che venga assegnata utilità zero al fatto di non ottenere nulla). Possiamo anche identificare tutti questi percorsi massimali con un unico "punto di disaccordo" astratto D. Volendo passare dalla game form al gioco, assumerò che le

[2]Per semplicità, si può restringere l'attenzione ai soli giochi ad informazione perfetta, anche se quanto detto vale anche al di fuori di questa assunzione

preferenze di ciascun giocatore siano definite su[3] $(X \times T) \cup \{D\}$. Dove $T = \mathbb{N}$.

Assumiano che le preferenze di ciascuno dei giocatori siano tali da essere rappresentabili per il tramite di una funzione di utilità definita su X ($u_I, u_{II} : X \to \mathbb{R}$; ricordo che $X = [0, 1]$; noto esplicitamente che stiamo assumendo delle preferenze "egoistiche", come si usa dire, nel senso che le preferenze di ciascun giocatore dipendono solo dai soldi che lui riesce ad ottenere, non dall'intera allocazione. *Ça va sans dire*: per gli ultimatum game si tratta di una assunzione poco confortata da riscontri empirico-sperimentali) ed un fattore di sconto, che non necessariamente sarà lo stesso per i due giocatori: δ_I e δ_{II}, entrambi positivi e strettamente minori di 1. Ciò ci dice, in particolare, che ad ogni fase del gioco l'utilità assegnata ad una data somma di denaro si riduce. Ad esempio, se alla prima iterazione la divisione proposta è $(x^1, 1-x^1)$ il payoff è $(\delta_I \cdot u_I(x^1), \delta_{II} \cdot u_{II}(1-x^1))$, cioè $\delta_I \cdot u_I(x^1)$ per I e $\delta_{II} \cdot u_{II}(1-x^1)$ per II; alla seconda iterazione se la divisione proposta è $(y^2, 1-y^2)$ il payoff è $(\delta_I \cdot u_I(y^2), \delta_{II} \cdot u_{II}(1-y^2))$; alla i-esima iterazione alla divisione $(z^i, 1-z^i)$ il payoff è $(\delta_I^i \cdot u_I(z^i), \delta_{II}^i \cdot u_{II}(1-z^i))$, che tende a zero al crescere delle iterazioni.

Per limitare le complicazioni "tecniche" assumo d'ora in poi che sia $u_I = u_{II} = x$.

L'insieme degli equilibri di Nash di questo gioco è molto grande. In particolare per ogni $x^* \in [0, 1]$ c'e la soluzione in cui i giocatori immediatamente si accordano su $(x^*, 1-x^*)$ (strategie che inducono questo risultato prevedono che entrambi i giocatori propongano sempre questa spartizione, e che accettino una proposta se e solo se è proprio questa proposta).

Un altro equilibrio è quello in cui entrambi accettano x^* al periodo t. La strategia che supporta questo equilibrio è quella in cui entrambi propongono di avere tutto fino al periodo $t-1$ e rifiutano fino a tale periodo qualunque altra proposta e dal periodo t in poi propongono e accettano solo x^*.

Questi equilibrii non sono però perfetti nei sottogiochi.

Esistono invece degli equilibri perfetti nei sottogiochi:

Siano $(x^*, 1-x^*)$ e $(y^*, 1-y^*)$ con la proprietà che $\delta_I x^* = y^*$ e $\delta_{II}(1-y^*) = (1-x^*)$.

E' facile verificare che si ha:

$$x^* = \frac{1-\delta_{II}}{1-\delta_I\delta_{II}} \qquad 1-x^* = \frac{\delta_I - \delta_I\delta_{II}}{1-\delta_I\delta_{II}}$$

Un equilibrio perfetto nei sottogiochi viene ottenuto mediante le seguenti strategie:

I propone sempre $(x^*, 1-x^*)$, accetta $(y^*, 1-y^*)$ e ogni altra proposta $(y, 1-y)$ per cui $y \geq y^*$ e rifiuta ogni proposta per cui $y < y^*$

[3] Per i formalisti "ad oltranza", assumo anche che D non appartenga all'insieme $X \times T$...

II propone sempre $(y^*, 1-y^*)$, accetta $(x^*, 1-x^*)$ e ogni altra proposta $(x, 1-x)$ per cui $1-x \geq 1-x^*$ e rifiuta ogni proposta per cui $1-x < 1-x^*$.

Non vi è un solo SPE, ma tutti i SPE danno lo stesso payoff ai due giocatori.

Osserviamo che, se $\delta_I = \delta_{II} = \delta$, otteniamo i seguenti payoff dai SPE:

$$x^* = \frac{1-\delta}{1-\delta^2} = \frac{1}{1+\delta} \qquad 1-x^* = \frac{\delta-\delta^2}{1-\delta^2} = \frac{\delta}{1+\delta}$$

Se assumiamo che δ sia molto prossimo ad 1, otteniamo valori molto prossimi ad $1/2$ per ciascun giocatore (il giocatore I ottiene un payoff un poco superiore rispetto a quello di II).

Se però assumiamo che l'intervallo di tempo fra due turni non sia più pari ad 1 (si tratta ovviamente di una unità di tempo convenzionale: l'unico significato serio di ciò è che δ rappresenta il fattore di sconto relativo a tale intervallo di tempo unitario), ma che questo intervallo sia τ e andiamo a studiare cosa avvenga per τ che tende a 0, troviamo che la soluzione converge al payoff $(1/2, 1/2)$. Che è quanto prevede il modello di contrattazione di Nash (per le assunzioni fatte, il problema di contrattazione associato è simmetrico). Vale la pena osservare, per concludere, che questa procedura di contrattazione, con fattore di sconto identico e τ che tende a zero, riproduce la soluzione di Nash del problema di contrattazione anche nel caso in cui le funzioni di utilità dei due giocatori non siano necessariamente l'identità, purché i giocatori siano comunque avversi al rischio. Inoltre, in presenza di due fattori di sconto diversi, si ottengono le cosiddette soluzioni di Nash asimmetriche, che nell'approccio assiomatico sono connesse al "potere di contrattazione" (bargaining power, esogenamente dato) dei giocatori: il modello di Rubinstein permette di "interpretare" (o di attribuire, se si preferisce) il potere di contrattazione ad una minore impazienza rispetto al tempo (ovverossia, ad un fattore di sconto più vicino ad 1).

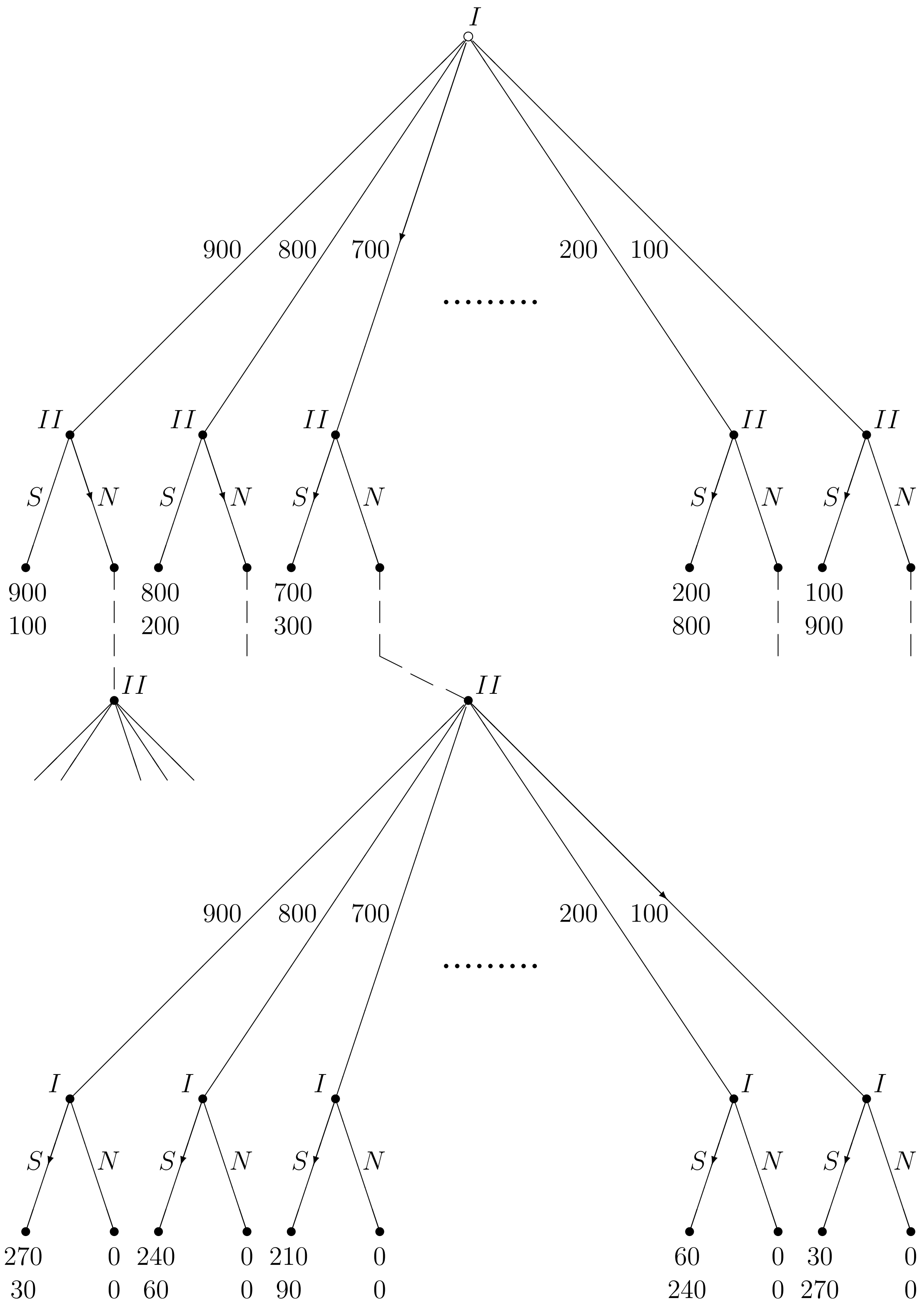

Figura 2: L'ultimatum game a due stadi