

# 1 Multiapplicazioni e "best reply"

**Definizione 1** *Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , diciamo multiapplicazione da  $A$  in  $B$  una legge che ad ogni elemento di  $A$  associa un sottoinsieme di  $B$ .*

Una multiapplicazione sarà indicata così:  $F : A \rightrightarrows B$

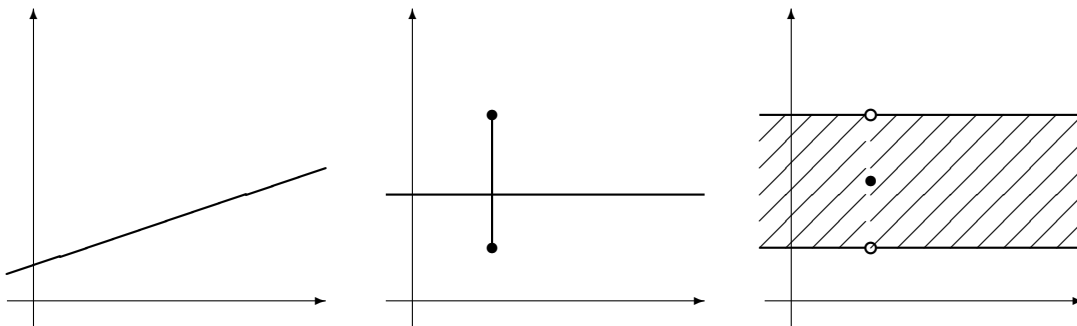
Si noti che una multiapplicazione da  $A$  in  $B$  non è altro che una funzione da  $A$  a  $\mathcal{P}(B)$  ( $\mathcal{P}(B)$  è l'insieme delle parti di  $B$ , ovvero l'insieme di tutti i sottoinsiemi di  $B$ ). Potremmo indicare con  $\hat{F} : A \rightarrow \mathcal{P}(B)$  questa funzione associata alla multiapplicazione  $F$ ; tuttavia, ci farà comodo (per descriverne più agevolmente, ad esempio, le sue proprietà topologiche) "vedere" una multiapplicazione come una funzione "a più valori" che assume valori in  $B$ . Osservo comunque come  $F$  individui univocamente  $\hat{F}$  e viceversa. Quindi, se necessario, non c'è alcun problema a passare da una formulazione ad un'altra.

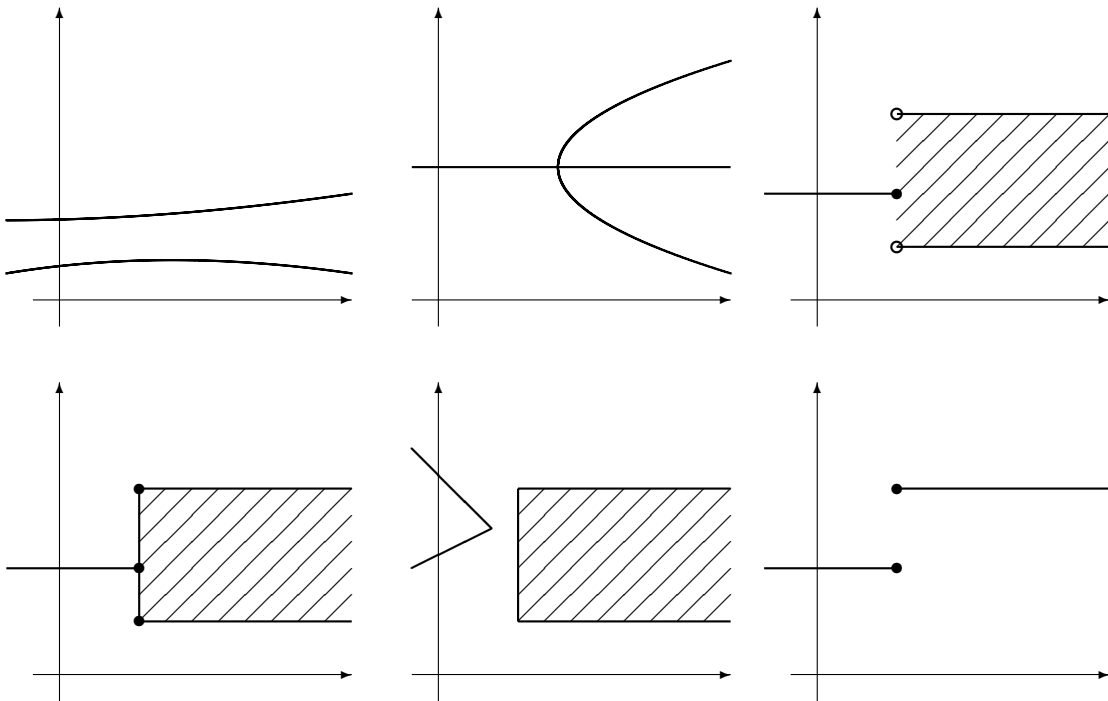
Si noti che, per come è stata definita una multiapplicazione, essa potrebbe anche assumere valori vuoti. Cioè, potrebbe essere  $F(a) = \emptyset$ , per taluni  $a \in A$ . Se vogliamo escludere questa situazione, diremo che  $F$  è una multiapplicazione a valori non vuoti, o che è una *corrispondenza* da  $A$  a  $B$  (adeguandoci ad una terminologia prevalente, pur se non completamente unificata).

Ovviamente  $\hat{F}$  ha un grafico come tutte le funzioni, solo che è difficile da visualizzare. Meglio occuparsi del grafico "ridotto" di  $F$ . Uso il termine grafico ridotto per rimarcare che *non* è un grafico di una funzione nel senso usuale del termine.

$$\text{gph}(F) = \{ (a, b) \in A \times B : b \in F(a) \}$$

I disegni seguenti mostrano vari esempi di multiapplicazioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ . Si noti che sono disegnati i loro grafici "ridotti".





Un esempio particolarmente importante di multiapplicazione è dato dalla “best-reply”.

Dato un gioco  $(X, Y, f, g)$ ,

$$R_I(y) = \operatorname{argmax}_{x \in X} f(x, y) = \{\bar{x} \in X : f(\bar{x}, y) \geq f(x, y) \quad \forall x \in X\}$$

è proprio una multiapplicazione da  $Y$  in  $X$ , la quale, senza ipotesi aggiuntive su  $X$  e su  $f$ , può essere a valori vuoti.

**Osservazione 1** *Non approfondiremo questo aspetto, ma si può notare come la definizione di  $R_I$  dipenda solo dal preordine totale  $\succeq_I$  che descrive le preferenze di  $I$  su  $X \times Y$ , e non dalla particolare funzione che scegliamo per rappresentarlo.*

È evidente che:

$$(\bar{x}, \bar{y}) \text{ è equilibrio di Nash} \iff \begin{cases} \bar{x} \in R_I(\bar{y}) \\ \bar{y} \in R_{II}(\bar{x}) \end{cases}$$

**Esercizio 1** *Provare questa affermazione.*

I disegni fatti nel paragrafo successivo per la battaglia dei sessi sono i grafici ridotti di  $R_I$  e  $R_{II}$ .

Possiamo anche introdurre  $R : X \times Y \rightrightarrows X \times Y$ , definita così:  $R(x, y) = R_I(y) \times R_{II}(x)$ .

Usando  $R$ , abbiamo:

$$(\bar{x}, \bar{y}) \text{ è equilibrio di Nash} \Leftrightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in R(\bar{x}, \bar{y}).$$

**Esercizio 2** *Provare a generalizzare tutto questo al caso di  $n$  giocatori:  $(X_1, \dots, X_n, f_1, \dots, f_n)$ .*

**Esercizio 3** *Provare che:*

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}(\bar{x}, \bar{y}) \Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph}(R_{II}) \\ (\bar{y}, \bar{x}) \in \text{gph}(R_I) \end{cases}$$

**Esercizio 4** *Definire  $F^{-1}$  per una multiapplicazione e osservare che  $\text{gph}(F^{-1})$  è "simmetrico" di  $\text{gph}(F)$ , nel senso che  $(a, b) \in \text{gph}(F) \Leftrightarrow (b, a) \in \text{gph}(F^{-1})$ . Dedurre che:*

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}(\bar{x}, \bar{y}) \Leftrightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in (\text{gph}(R_{II})) \cap (\text{gph}(R_I^{-1}))$$

Diciamo che una multiapplicazione  $F$  è a valori chiusi (rispettivamente convessi, aperti, etc.) se  $F(a)$  è chiuso (rispettivamente: convesso, aperto, etc.) per ogni  $a \in A$ . Ovviamente servirà che  $B$  sia spazio topologico, o spazio vettoriale, etc., a seconda dei casi.

Se  $A$  e  $B$  sono spazi topologici, ci piacerebbe potere dire se e quando  $F$  è "continua". In realtà si rivelano più importanti le condizioni di "semicontinuità" per  $F$ .

Noi non entreremo in queste problematiche. Osservo solo come, ad esempio, il secondo disegno è il grafico di un  $F$  che non è semicontinua superiormente ma non semicontinua inferiormente, mentre il terzo rappresenta una  $F$  che è semicontinua inferiormente ma non semicontinua superiormente. L'approccio più coerente alle (semi)continuità di  $F$  passa attraverso le topologizzazioni di  $\mathcal{P}(B)$ , mediante le cosiddette topologie di Vietoris. Chi fosse interessato all'argomento, può consultare Klein e Thompson (1984) oppure Baiocchi e Capelo (1978).

La ragione per cui non mi addentro in questa problematica è che a noi basta solo la semicontinuità superiore di  $R$ . E, approfittando del fatto che  $R$  sarà a valori in un compatto, possiamo cavarcela facilmente, usando la nozione di multiapplicazione a grafico (ridotto) chiuso. Nozione che *non* è *equivalente* in generale alla semicontinuità superiore, ma lo è quando la multiapplicazione è a valori in un compatto.

La definizione è la seguente.

**Definizione 2** Siano  $A, B$  spazi topologici e  $F : A \rightrightarrows B$ . Diremo che  $F$  ha grafico (ridotto) chiuso se  $\text{gph}(F)$  è un sottoinsieme chiuso di  $A \times B$

**Osservazione 2** Se  $F$  ha grafico ridotto chiuso e lo spazio topologico  $A$  è  $T_1$  (quindi è sufficiente che sia di Hausdorff), allora  $F$  è a valori chiusi. Basta notare che  $F(a)$  è (omeomorfo a):  $(\{a\} \times B) \cap (\text{gph}(F))$  e che  $\{a\}$  è un insieme chiuso perché  $A$  è  $T_1$ .

**Osservazione 3** Se  $A, B$  sono spazi metrici (basterebbe che fossero spazi topologici che soddisfano il primo assioma di numerabilità) sappiamo che non c'è differenza tra chiusura e chiusura sequenziale.

Pertanto,  $\text{gph}(F)$  è chiuso se e solo se è sequenzialmente chiuso. Cioè:

$$\left. \begin{array}{l} (a_n, b_n) \in \text{gph}(F) \\ (a_n, b_n) \rightarrow (a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow (a, b) \in \text{gph}(F)$$

Questo può essere riscritto così :

$$\left. \begin{array}{l} (a_n) \rightarrow a \\ (b_n) \rightarrow b \\ (b_n) \in F(a_n) \end{array} \right\} \Rightarrow b \in F(a)$$

## 2 La battaglia dei sessi

Prendiamo il gioco più volte visto:

$I \backslash II$	$L$	$R$
$T$	2 1	0 0
$B$	0 0	1 2

E chiediamoci come sia fatta la best reply per la sua estensione mista.

$$\Delta(\{T, B\}) \equiv [0, 1] \quad \Delta(\{L, R\}) \equiv [0, 1]$$

$$p = (p, 1 - p) \quad q = (q, 1 - q) \quad (\text{abuso di notazione})$$

$$f(p, q) = 2pq + 1(1 - p)(1 - q)$$

$$g(p, q) = pq + 2(1 - p)(1 - q)$$

Cerchiamo  $R_{II}(p)$ .

Fissiamo  $\bar{p} \in [0, 1]$  e cerchiamo  $\text{argmax}_{q \in [0, 1]} g(\bar{p}, q)$

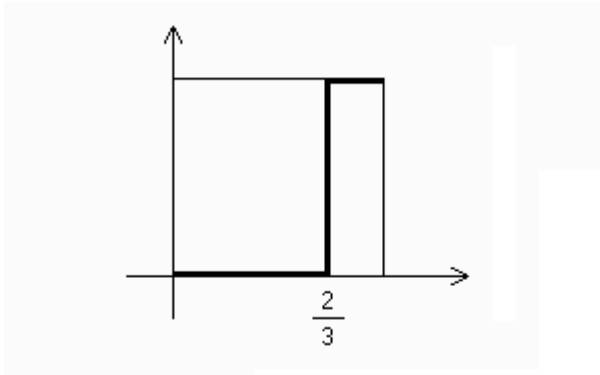
$$g(\bar{p}, q) = \bar{p}q + 2(1 - \bar{p})(1 - q) = \bar{p}q + 2 - 2\bar{p} - 2q + 2\bar{p}q = (3\bar{p} - 2)q + 2 - 2\bar{p}$$

$$3\bar{p} - 2 > 0 \Leftrightarrow \bar{p} > 2/3$$

$$\text{Se } \bar{p} < 2/3 \quad \text{argmax } g(\bar{p}, q) = \{0\}$$

$$\text{Se } \bar{p} = 2/3 \quad \text{argmax } g(\bar{p}, q) = [0, 1], \text{ infatti } g(\bar{p}, q) = g(2/3, q) \text{ è costante.}$$

Se  $\bar{p} > 2/3$   $\operatorname{argmax} g(\bar{p}, q) = \{1\}$   
 Disegniamo  $R_{II}(p)$ .



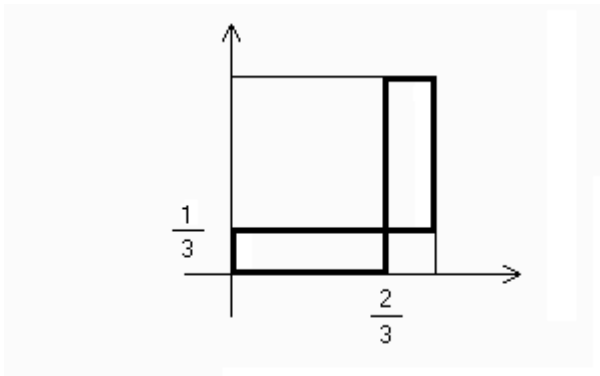
Calcoliamo ora  $R_I(q)$ . Fissiamo  $\bar{q} \in [0, 1]$  e cerchiamo  $\operatorname{argmax}_{p \in [0, 1]} f(p, \bar{q})$   
 $f(p, \bar{q}) = 2\bar{q}p + (1 - p)(1 - \bar{q}) = 2p\bar{q} + 1 - p - \bar{q} + p\bar{q} = (3\bar{q} - 1)p + 1 - \bar{q}$   
 $3\bar{q} - 1 > 0 \Leftrightarrow \bar{q} > 1/3$ .

Se  $\bar{q} < 1/3$   $\operatorname{argmax} f(p, \bar{q}) = \{0\}$ .

Se  $\bar{q} = 1/3$   $\operatorname{argmax} f(p, \bar{q}) = [0, 1]$ , infatti  $f(p, \bar{q}) = f(p, 1/3)$  è costante.

Se  $\bar{q} > 1/3$   $\operatorname{argmax} f(p, \bar{q}) = \{1\}$

Disegniamo il "grafico" sia di  $R_I(q)$  che di  $R_{II}(p)$



I grafici ridotti delle due multiapplicazioni hanno intersezione non vuota e ciascuno dei punti della loro intersezione individua un punto fisso per  $R$

(grazie agli esercizi 3 e 4). Quindi  $R$  ha tre punti fissi, ovvero l'estensione mista della battaglia dei sessi ha tre equilibri di Nash.

Osserviamo come né  $R_I$  né  $R_{II}$  siano funzioni, ma come siano invece delle multiapplicazioni: anche in un gioco semplice e per nulla complicato come il gioco della battaglia dei sessi, l'idea di best reply ci porta a dover utilizzare le multiapplicazioni

### 3 Punti fissi

L'equivalenza:

$$(\bar{x}, \bar{y}) \text{ è equilibrio di Nash} \Leftrightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in R(\bar{x}, \bar{y})$$

ci permette di "ridurre" il problema di trovare un equilibrio di Nash a quello di trovare un punto fisso per  $R$ .

Se  $R$  fosse una funzione ed identificassimo il singleton  $R(x, y)$  con l'unico suo elemento, potremmo scrivere  $(\bar{x}, \bar{y}) = R(\bar{x}, \bar{y})$ .

Si noti che l'idea di ridurre un problema di equilibrio a quello di un punto fisso (o viceversa) è un'idea generale. Non solo: molti problemi apparentemente lontani dall'idea di punto fisso possono esservi ricondotti. Ricordo ad esempio che mediante un teorema di punto fisso si può dimostrare il teorema di Dini, così come si può dimostrare l'esistenza ed unicità della soluzione per un problema di Cauchy.

Allora, avendo ridotto il problema di ricerca di equilibri di Nash a un problema di ricerca di punti fissi, chiediamoci che teoremi abbiamo a disposizione.

Quelli classici sono due: il teorema delle contrazioni e quello di Brouwer. Ovviamente li potremmo applicare direttamente solo quando  $R$  fosse una funzione.

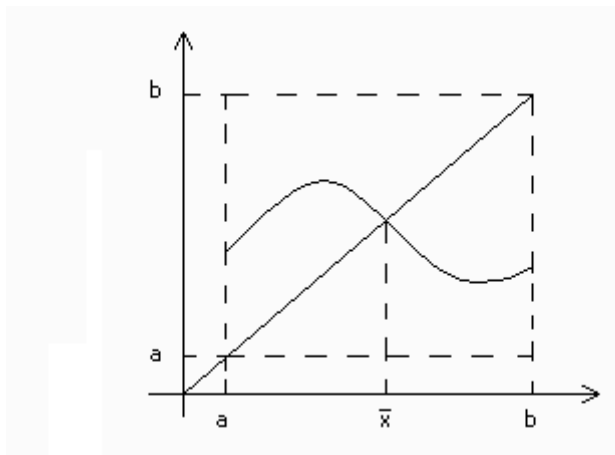
**Definizione 3** Sia  $(S, d)$  uno spazio metrico. Una funzione  $f : S \rightarrow S$  è detta contrazione se esiste  $K < 1$  tale che  $d(f(s), f(t)) \leq Kd(s, t)$ .

**Teorema 1 (delle contrazioni)** Sia  $(S, d)$  uno spazio metrico completo e sia  $f : S \rightarrow S$  una contrazione. Allora  $f$  ha uno ed un solo punto fisso.

Nel contesto che ci interessa, difficilmente si riesce ad applicare il teorema delle contrazioni, perché raramente possiamo ottenere che  $R$  sia una contrazione.

Il teorema di Brouwer si presta di più al nostro tipo di problema.

**Teorema 2 (Brouwer)** Sia  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $K$  compatto, convesso e non vuoto. Sia  $f : K \rightarrow K$  continua. Allora  $f$  ha un punto fisso.



$K = [a, b]$ ,  $\bar{x}$  punto fisso.

La figura sopra mostra un esempio nel quale  $K$  è un intervallo  $[a, b]$  di  $\mathbb{R}$ . In questo caso particolare, l'esistenza di un punto fisso può essere agevolmente dedotta dal teorema degli zeri. La dimostrazione del caso generale è invece assai complessa. In Baiocchi e Capelo (1978) si può trovare una dimostrazione basata ottenuta mediante un risultato di carattere combinatorio (il lemma di Sperner sulle triangolazioni) e tramite il cosiddetto "KKM" ("lemma" di Knaster, Kuratowski e Mazurkiewicz). Tra le varie dimostrazioni, ve ne sono alcune cosiddette elementari. Tra queste si può citare quelle di Kuga (1974) o di Kannai (1981).

Osservo anche che è possibile utilizzare il teorema di Brouwer per dimostrare l'esistenza di un equilibrio di Nash. Anzi, Nash stesso ha mostrato come si potesse seguire questa strada. Io preferisco l'approccio mediante il teorema di Kakutani perché è più naturale.

## 4 Teorema di Kakutani e teorema di Berge

Il teorema di Kakutani è la generalizzazione del teorema di Brouwer alle multiapplicazioni.

**Teorema 3 (Kakutani)** *Sia  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $K$  compatto, convesso e non vuoto. Sia  $F : K \rightrightarrows K$  una corrispondenza a valori (non vuoti e) convessi, ed a*

grafico ridotto chiuso. Allora  $F$  ha un punto fisso nel senso che esiste  $k \in K$  tale che  $k \in F(k)$

**Osservazione 4** Si noti che il teorema di Kakutani è una generalizzazione del teorema di Brouwer: ovvero, se abbiamo  $f : K \rightarrow K$  e definiamo  $F(k) = \{f(k)\}$ , se  $f$  soddisfa le ipotesi del teorema di Brouwer, allora  $F$  soddisfa quelle di Kakutani.

Per dimostrare il teorema di esistenza di un equilibrio, dovremo dimostrare che la corrispondenza di miglior risposta soddisfa le ipotesi del teorema di Kakutani. In particolare, ci servirà dimostrare che ha grafico ridotto chiuso. A questo scopo è utile il teorema di Berge.

Il teorema di Berge (o del massimo) si occupa di un problema interessante di per sé: se ho  $f_n \rightarrow f$ , che succede ad  $\operatorname{argmax} f_n$ ? Tende ad  $\operatorname{argmax} f$ ? E se ho  $f_\lambda \rightarrow f_{\lambda_0}$  per  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ , in quale senso?

Ma avere  $\lambda \rightarrow f_\lambda$  (con  $f_\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}$ ) è come avere:  $\varphi : \Lambda \times A \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) (Una successione di funzioni può essere vista come  $\varphi : \bar{\mathbb{N}} \times A \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  e  $\phi(n, x) = f_n(x)$ ,  $\phi(\infty, x) = f(x)$ ). Insomma, un modo "veloce" per trattare questo problema consiste nel considerare che cosa succede ad una funzione di due variabili delle quali ne teniamo una "come parametro" e l'altra è invece la variabile rispetto alla quale massimizziamo.

Vediamo allora un enunciato del teorema di Berge.

**Teorema 4 (Berge)** Siano  $S, T$  spazi metrici e sia  $f : S \times T \rightarrow \mathbb{R}$ , continua. Allora la multiapplicazione  $M : S \rightrightarrows T$  definita come  $M(S) = \operatorname{argmax}_{t \in T} f(s, t)$ , ha grafico ridotto chiuso.

**Dimostrazione** Ci serve dimostrare che:

$$\left. \begin{array}{l} s_n \rightarrow s_0 \\ t_n \rightarrow t_0 \\ t_n \in \operatorname{argmax}_{t \in T} f(s_n, t) \end{array} \right\} \Rightarrow t_0 \in \operatorname{argmax}_{t \in T} f(s_0, t)$$

Supponiamo per assurdo che  $t_0 \notin \operatorname{argmax}_{t \in T} f(s_0, t)$ . Allora  $\exists \bar{t}$  tale che  $f(s_0, t_0) < f(s_0, \bar{t})$ .

Sia  $\epsilon = f(s_0, \bar{t}) - f(s_0, t_0)$ . Allora (per  $n$  sufficientemente grande):

$$\epsilon = [f(s_0, \bar{t}) - f(s_n, \bar{t})] + [f(s_n, \bar{t}) - f(s_n, t_n)] + [f(s_n, t_n) - f(s_0, t_0)] < \frac{1}{3}\epsilon + 0 + \frac{1}{3}\epsilon,$$

quindi  $\epsilon < \frac{2}{3}\epsilon$ . Contraddizione.



## 5 Dimostrazione del teorema di esistenza per equilibri di Nash

**Teorema 5** Sia  $G = (X, Y, f, g)$ . Con  $X, Y$  sottoinsiemi non vuoti, compatti e convessi di spazi euclidei di dimensione finita. Siano  $f, g : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

Supponiamo che le funzioni  $x \mapsto f(x, \bar{y})$  e  $y \mapsto g(\bar{x}, y)$  siano quasi concave ( $\forall \bar{y} \in Y$  e  $\forall \bar{x} \in X$  rispettivamente).

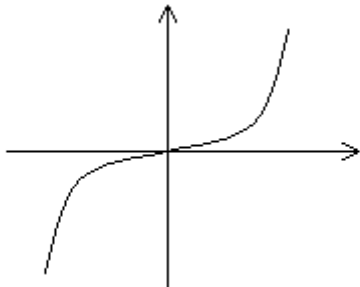
Allora esiste  $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$  che è equilibrio di Nash per  $G$ .

Spazio euclideo: possiamo assumere ad esempio  $X \subseteq \mathbb{R}^m$  e  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ . Con la solita metrica.

**Definizione 4** Sia  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $E$  convesso,  $\varphi$  si dice quasi concava se  $\forall t \in \mathbb{R}$   $\{x \in E : \varphi(x) \geq t\}$  è convesso.

**Esercizio 5** Dimostrare che se  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  è concava, allora è quasi-concava.

**Esempio 1** Il grafico seguente descrive una funzione quasi concava, ma non concava:



**Problema 1** Sia  $\succeq$  preordine totale su  $E$  ( $E \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $E$  convesso). Sia  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ , funzione di utilità che rappresenta  $\succeq$ . Trovare una condizione su  $\succeq$  che sia equivalente alla quasi concavità di  $\varphi$ .

**Dimostrazione (del teorema).** Basta verificare che  $R : X \times Y \rightrightarrows X \times Y$  soddisfa le ipotesi del teorema di Kakutani. Sia  $(x, y) \in X \times Y$ , allora  $R_I(y)$  ed  $R_{II}(x)$  sono non vuoti (argmax di funzioni continue su compatti non vuoti). Quindi  $R(x, y)$  è non vuoto.

Inoltre  $R_I(y)$  è convesso. Infatti  $\operatorname{argmax}_{x \in X} f(x, y) = \{x \in X : f(x, y) \geq \max_{x \in X} f(x, y)\}$ , quindi è convesso perché  $f(\cdot, y)$  è quasi concava.

Discorso analogo si fa per  $R_{II}(x)$ .  $R(x, y)$  è convesso perché prodotto cartesiano di convessi.

Il fatto che  $R$  abbia grafico ridotto chiuso, dipende dal fatto che  $R_{II}$  e  $R_I$  hanno questa proprietà.

Dire che  $R$  ha grafico (ridotto) sequenzialmente chiuso significa:

$$\left. \begin{array}{l} (x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0) \\ (z_n, w_n) \rightarrow (z_0, w_0) \\ (z_n, w_n) \in R(x_n, y_n) \end{array} \right] \Rightarrow (z_0, w_0) \in R(x_0, y_0)$$

Ma questo si scinde nelle due condizioni:

$$\left. \begin{array}{l} y_n \rightarrow y_0 \\ z_n \rightarrow z_0 \\ z_n \in R_I(y_n) \end{array} \right] \Rightarrow z_0 \in R_I(y_0)$$

$$\left. \begin{array}{l} x_n \rightarrow x_0 \\ w_n \rightarrow w_0 \\ w_n \in R_{II}(x_n) \end{array} \right] \Rightarrow w_0 \in R_{II}(x_0)$$

E queste sono conseguenze dirette del teorema di Berge.  
C.V.D.

**Osservazione 5** *Se  $(X, Y, f, g)$  è un gioco finito allora la sua estensione mista  $(\Delta(X), \Delta(Y), \hat{f}, \hat{g})$  soddisfa le condizioni del teorema. Infatti  $\Delta(X)$  e  $\Delta(Y)$  sono sottoinsiemi non vuoti, compatti e convessi di spazi euclidei,  $\hat{f}, \hat{g}$  sono continue perché polinomi. Ed  $\hat{f}, \hat{g}$  sono lineari (quindi quasi concave) nella "loro" variabile.*

Questo è il teorema di Nash.

## 6 Bibliografia

Baiocchi C. e A.C. Capelo (1978): *Disequazioni variazionali e quasivariazionali. Applicazioni a problemi di frontiera libera*, Vol.2, pp.300, (Collana Quaderni dell'Unione Matematica Italiana n.7), Pitagora, Bologna.

Kannai, Y. (1981): *An Elementary Proof of the No-Retraction Theorem*, American Mathematical Monthly, **88(4)**, 264-268.

disponibile in rete:

<http://cowles.econ.yale.edu/P/cp/p05a/p0529.pdf>

Klein, E. e A.C. Thompson (1984): *Theory of correspondences*, Wiley, New York.

K. Kuga (1974), *Brouwer's Fixed Point Theorem: An Alternate Proof*, SIAM Journal of Mathematical Analysis, **5**, 893-897.

disponibile in rete:

<http://locus.siam.org/fulltext/SIMA/volume-05/0505085.pdf>