1 Teorema di Kakutani e teorema di Berge

Il teorema di Kakutani è la generalizzazione del teorema di Brouwer alle multiapplicazioni.

Teorema 1.1 $\{$*Kakutani*$\}$
Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$, K *compatto, convesso e non vuoto. Sia* $F : K \rightrightarrows K$ *una corrispondenza a valori (non vuoti e) convessi, ed a grafico ridotto chiuso. Allora* F *ha un punto fisso nel senso che* $\exists k \in K$ *tale che* $k \in F(k)$

Osservazione 1.1 *Si noti che il teorema di Kakutani è una generalizzazione del teorema di Brouwer: ovvero, se abbiamo* $f : K \to K$ *e definiamo* $F(k) = \{f(k)\}$*, se* f *soddisfa le ipotesi del teorema di Brouwer, allora* F *soddisfa quelle di Kakutani.*

Il teorema di Berge (o del massimo) si occupa di un problema interessante di per sé.
Se ho $f_n \to f$, che succede ad argmax f_n? Tende ad argmax f? E se ho $f_\lambda \to argmax f_{\lambda_0}$ per $\lambda \to \lambda_0$, in quale senso?
Ma avere $\lambda \to f_\lambda$ (con $f_\lambda : A \to B$) è come avere: $\varphi : \Lambda \times A \to B \ \ (\lambda \in \Lambda)$
(Successioni $\varphi : \bar{\mathbb{N}} \times A \to B$, dove $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$). Insomma un modo "veloce" per trattare questo problema consiste nel considerare che cosa succede ad una funzione di due variabili delle quali ne teniamo una "come parametro" e l'altra è invece la variabile rispetto alla quale massimizziamo.
Vediamo allora un enunciato del teorema di Berge.

Teorema 1.2 (Berge) *Siano* S, T *spazi metrici e sia* $f : S \times T \to \mathbb{R}$*, continua. Allora la multiapplicazione* $M : S \rightrightarrows T$ *definita come* $M(S) = argmax_{t \in T}\ f(s,t)$*, ha grafico ridotto chiuso.*

<u>Dimostrazione</u> Ci serve dimostrare che:

$$\left.\begin{array}{c} s_n \to s_0 \\ t_n \to t_0 \\ t_n \in argmax_{t \in T} f(s_n, t) \end{array}\right] \Rightarrow t_0 \in argmax_{t \in T} f(s_0, t)$$

Per assurdo supponiamo di no.
Allora $\exists \bar{t}$ tale che $f(s_0, t_0) < f(s_0, \bar{t})$.
Sia $\epsilon = f(s_0, \bar{t}) - f(s_0, t_0)$. Allora

$\epsilon = [f(s_0, \bar{t}) - f(s_n, \bar{t})] + [f(s_n, \bar{t}) - f(s_n, t_n)] + [f(s_n, t_n) - f(s_0, t_0)] < \frac{1}{3}\epsilon + 0 + \frac{1}{3}\epsilon$, quindi
$f(s_0, \bar{t}) - f(s_0, t_0) < \frac{2}{3}\epsilon$ Contraddizione ! Sarà utile vedere anche qualche esempio che ci mostri che cosa succede.
Grafici animati...
Problema Sia $\succeq$ preordine totale su E ($E \subseteq \mathbb{R}^k$, E convesso). Sia $\varphi : E \to \mathbb{R}$, funzione di utilità che rappresenta $\succeq$. Trovare una condizione su $\succeq$ che sia equivalente alla quasi concavità di φ.

Dimostrazione (del teorema). Basta verificare che $R : X \times Y \rightrightarrows X \times Y$ soddisfa alle ipotesi del teorema di Kakutani. Sia $(x, y) \in X \times Y$, allora $R_I(y)$ ed $R_{II}(x)$ sono non vuoti (argmax di funzioni continue su comp non vuoto).
Quindi $R(x, y)$ è non vuoto .
Inoltre $R_I(y)$ è convesso. Infatti $\text{argmax}_{x \in X} f(x, y) = \{x \in X : f(x, y) \geq max_{x \in X} f(x, y)\}$, quindi è convesso perché $f(\cdot, y)$ è quasi concava.
Discorso analogo si fa per $R_{II}(x)$. $R(x, y)$ è convesso perché prodotto cartesiano di convessi.
Il fatto che R abbia grafico ridotto chiuso, dipende dal fatto che R_{II} e R_I hanno questa proprietà.

2 Dimostrazione teorema esistenza equilibrio di Nash

Teorema 2.1 *Sia $G = (X, Y, f, g)$. Con X, Y sottoinsiemi non vuoti, compatti e convessi di spazi euclidei di dimensione finita. Siano $f, g : X \times Y \to \mathbb{R}$ continue.*
Supponiamo che:

$$\left.\begin{array}{l} \forall \bar{y} \in Y \;\; x \to f(x, \bar{y}) \\ \forall \bar{x} \in X \;\; y \to g(\bar{x}, y) \end{array}\right. \quad \textit{siano quasi concave}$$

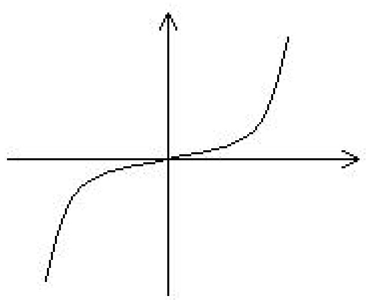
Allora $\exists (\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ che è equilibrio di Nash per G.

Spazio euclideo: possiamo assumere ad esempio $X \subseteq \mathbb{R}^m$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Con la solita metrica.

Definizione 2.1 *$\varphi : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}^k$, E convesso φ si dice quasi concava se $\forall t \in \mathbb{R}$ $\{x \in E : \varphi(x) \geq t\}$ è convesso.*

Esercizio 2.1 *Dimostrare che se $\varphi : E \to \mathbb{R}$ è concava, allora è quasi-concava.*

Esempio 2.1 *Si consideri il grafico della seguente funzione.*



Quasi concava, ma non è concava.

Dire che R ha grafico (ridotto) sequenzialmente chiuso significa:

$$\left.\begin{array}{c} (x_n, y_n) \to (x_0, y_0) \\ (z_n, w_n) \to (z_0, w_0) \\ (z_n, w_n) \in R(x_n, y_n) \end{array}\right] \Rightarrow (z_0, w_0) \in R(x_0, y_0)$$

Ma questo si scrive nelle due condizioni:

$$\left.\begin{array}{c} y_n \to y_0 \\ z_n \to z_0 \\ z_n \in R_I(y_n) \end{array}\right] \Rightarrow (z_0, w_0) \in R_I(y_0)$$

$$\left.\begin{array}{c} x_n \to x_0 \\ w_n \to w_0 \\ w_n \in R_{II}(x_n) \end{array}\right] \Rightarrow w_0 \in R_{II}(x_0)$$

E queste sono conseguenze dirette del teorema di Berge.
C.V.D.

Osservazione 2.1 *Se* (X, Y, f, g) *è gioco finito allora la sua estensione mista* $(\triangle(X), \triangle(Y), \hat{f}, \hat{g})$ *soddisfa le condizioni del teorema. Infatti* $\triangle(X)$ *e* $\triangle(Y)$ *sono non vuoti, compatti e convessi in spazi euclidei,* $\hat{f}, \hat{g}$ *sono continui perché polinomi. Ed* $\hat{f}, \hat{g}$ *sono lineari (quindi quasi concave) nella "loro" variabile.*
Questo è il teorema di Nash.