1) Determinare gli eventuali equilibri di Nash in strategie pure del seguente gioco in forma strategica:

$I \backslash II$	L	C	R
T	$0,1$	$-1,3$	$1,3$
M	$0,2$	$1,1$	$2,0$
B	$1,0$	$1,-1$	$3,0$

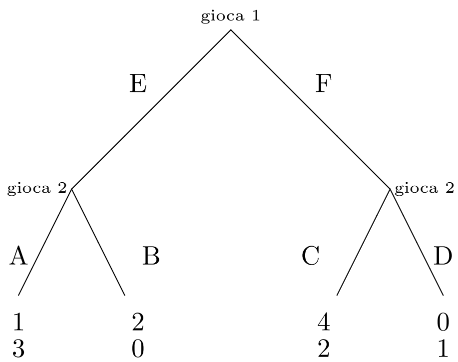
Esistono strategie debolmente dominate? E strategie fortemente dominate?

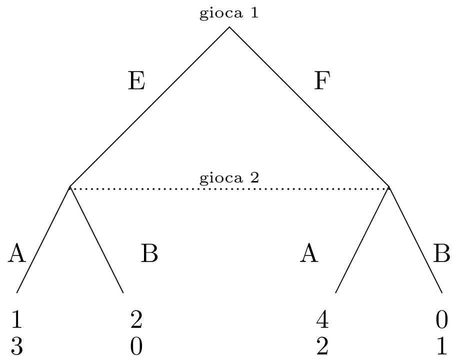
Soluzione
Indichiamo la "best reply" sottolineando i vari elementi della matrice:

$I \backslash II$	L	C	R
T	$0,1$	$-1,\underline{3}$	$1,\underline{3}$
M	$0,\underline{2}$	$\underline{1},1$	$2,0$
B	$\underline{1},\underline{0}$	$\underline{1},-1$	$\underline{3},\underline{0}$

Quindi gli equilibri di Nash sono (B, L) e (B, R).
La strategia T è fortemente dominata da B. La strategia T è debolmente dominata da M e da B. La strategia M è debolmente dominata da B. Il giocatore II non ha strategie dominate

2) Si considerino i seguenti due giochi in forma estesa:





Scrivere la forma strategica di entrambi (uno è a informazione perfetta, mentre l'altro non lo è).

Calcolare gli equilibri di Nash in strategie pure e gli equilibri perfetti nei sottogiochi di quello dei due che è a informazione perfetta.

Calcolare gli equilibri di Nash in strategie miste di quello non a informazione perfetta.

Soluzione

La forma strategica del primo gioco è:

$I \backslash II$	AC	AD	BC	BD
E	$1, \underline{3}$	$\underline{1}, \underline{3}$	$2, 0$	$\underline{2}, 0$
F	$\underline{4}, \underline{2}$	$0, 1$	$\underline{4}, \underline{2}$	$0, 1$

Nella forma strategica abbiamo già sottolineato i payoff per mostrare la best reply e trovare gli equilibri di Nash. Gli equilibri di Nash sono (E, AD), (F, AC) e (F, BC). Di questi (F, AC) è l'unico equilibrio perfetto nei sottogiochi (cosa che si verifica agevolmente applicando l'induzione a ritroso).

La forma strategica del secondo gioco è:

$I \backslash II$	A	B
E	$1, \underline{3}$	$\underline{2}, 0$
F	$\underline{4}, \underline{2}$	$0, 1$

Anche qui abbiamo sottolineato, etc... Il gioco ha un solo equilibrio di Nash: (F, A).

Per quanto riguarda le strategie miste, usiamo come di solito $p, 1-p$ e $q, 1-q$

per indicare le strategie miste rispettivamente di I e II.
Il payoff atteso di I è:

$$f(p,q) = pq + 2p(1-q) + 4(1-p)q = pq + 2p - 2pq + 4q - 4pq =$$

$$= -5pq + 2p + 4q = p(2-5q) + 4q$$

Quindi per $q < 2/5$ la best reply per I è $p = 1$, per $q = 2/5$ è tutto $[0,1]$, per $q > 2/5$ la best reply è $p = 0$.
Per II il payoff atteso è:

$$g(p,q) = 3pq + 2p(1-q) + (1-p)(1-q) = 3pq + 2q - 2pq + 1 - p - q + pq =$$

$$= 2pq - p + 1 + q = q(2p+1) + (1-q)$$

La best reply per II è sempre $q = 1$, qualunque sia p.

In figura 1 disegniamo le best reply:

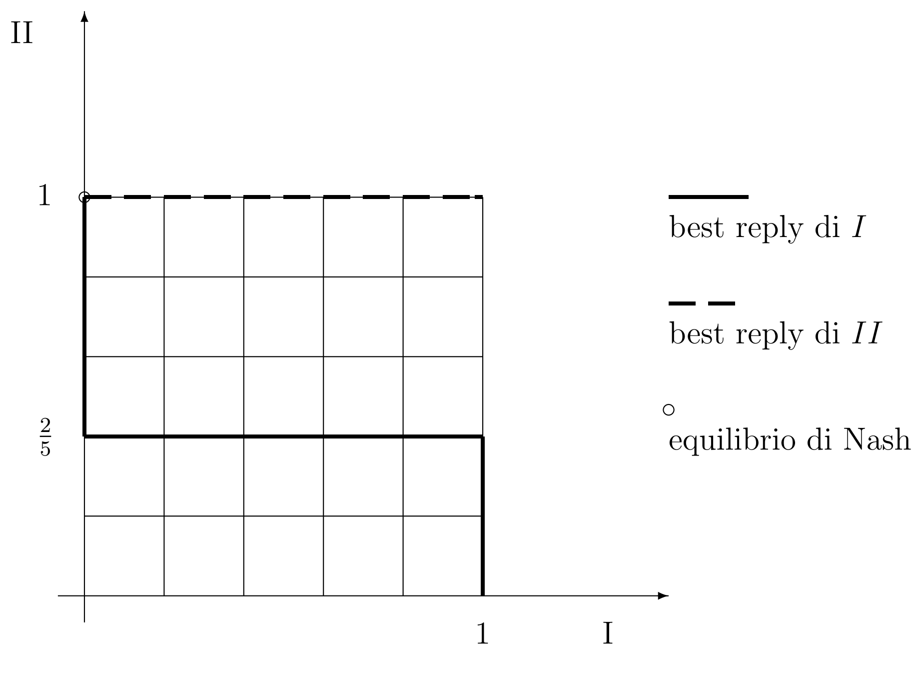


Figura 1: I grafici delle corrispondenze di miglior risposta

Le best reply ci permettono di individuare gli equilibri di Nash in strategie miste. L'unico che troviamo è indicato in figura, e corrisponde a $p = 0$ e

$q = 1$. Vale a dire, si tratta dell'equilibrio in strategie pure che già avevamo trovato.
Potevamo in realtà risparmiarci i conti, semplicemente osservando che la strategia A domina strettamente B.
3) Dato il gioco $(\{1, 2, 3\}, v)$ con v funzione caratteristica tale che:

$v(\emptyset) = v(1) = v(2) = 0$, $v(3) = 1$;
$v(1, 2) = 9$, $v(2, 3) = 5$, $v(1, 3) = 6$, $v(1, 2, 3) = 12$

Calcolare il valore Shapley del gioco $(\{1, 2, 3\}, v)$ e dire se sta ne nucleo.

Soluzione

Costruiamo la tabella seguente, dove nella prima colonna mettiamo le varie permutazioni possibili dei tre giocatori, mentre nella colonna "intestata" con i mettiamo i guadagni marginali attribuiti al giocatore i nelle varie permutazioni possibili. Le due ultime righe contengono le somme dei guadagni marginali e poi tali valori divisi per 6 (ovverossia 3!), vale a dire il valore Shapley.

permutazione	1	2	3
123	0	9	3
132	0	6	6
213	9	0	3
231	7	0	5
312	5	6	1
321	7	4	1
totale	28	25	19
valore Shapley	28/6	25/6	19/6

Si può osservare che $\phi_1(v) + \phi_2(v) = 28/6 + 25/6 = 53/6 < 54/6 = 9 = v(\{1, 2\})$ e quindi il valore Shapley non sta nel nucleo.

4) Si consideri il gioco $(\{1, 2, 3\}, w)$ con w funzione caratteristica tale che:

$w(\emptyset) = 0$, $w(1) = 2$, $w(2) = 3$, $w(3) = 1$;
$w(1, 2) = 5$, $w(2, 3) = 4$, $w(1, 3) = 3$, $w(1, 2, 3) = 6$

Trovare i giocatori "dummy" del gioco $(\{1, 2, 3\}, w)$.
Sfruttare la proprietà del "dummy player" e quella di additività riferite al

valore Shapley per calcolare il valore Shapley del gioco $(\{1, 2, 3\}, v + w)$.

Soluzione
La verifica che ogni giocatore è un "dummy player" è banale, anche se noiosa (per ogni giocatore i, e per ogni coalizione S che non contenga i, abbiamo $w(S \cup \{i\}) = w(S) + w(\{i\}))$.
Ne segue che $\phi_i(w) = w(i)$. E quindi $\phi_1(w) = 2, \phi_2(w) = 3, \phi_3(w) = 1$.
La proprietà di additività del valore Shapley ci permette di trovare immediatamente il valore Shapley per $v + w$ ed è:

$$\phi_1(v + w) = 2 + 28/6, \quad \phi_2(v + w) = 3 + 25/6, \quad \phi_3(v + w) = 1 + 19/6$$