1 L'esempio di Re Salomone

QUANTO SEGUE IN INGLESE E' RICOPIATO DA Osborne e Rubinstein LA PARTE IN ITALIANO E' UN INSERTO MIO

Nash Implementation

[We have shown] that any Nash - implementable choice rule is also truthfully Nash - implementable: there is a game form in which (i) each player has to announce a preference profile and (ii) for any preference profile truth - telling is a Nash equilibrium. This result serves two purposes. First, it helps to determine the boundaries of the set of Nash - implementable choice rules. Second, it shows that a simple game can be used to achieve the objective of a planner who considers truthful Nash equilibrium to be natural and is not concerned about the outcome so long as it is in the set given by the choice rule[1].

Lemma 185.2 (Revelation principle for Nash implementation)
Let $(N, C, \mathcal{P}, \mathcal{G})$ be an environment in which $\mathcal{G}$ is the set of strategic game forms. If a choice rule is Nash-implementable then it is truthfully Nash-implementable.

Proof. Let $G = (N, (A_i)_{i \in N}, g)$ be a game form that Nash - implements the choice rule $f : \mathcal{P} \to C$ and for each $\succeq \in \mathcal{P}$ let $(a_i(\succeq))$ be a Nash equilibrium of the game $(G, \succeq)$. Define a new game form $G^\star = (N, (A_i^\star), g^\star)$ in which $A_i^\star = \mathcal{P}$ for each $i \in N$ and $g^\star(p) = g((a_i(p_i)))$ for each $p \in \prod_{i \in N} A_i^\star$. (Note that each p_i is a preference profile and p is a profile of preference profiles). Clearly the profile $p^\star$ in which $p_i^\star = \succeq$ for each $i \in N$ is a Nash equilibrium of $(G^\star, \succeq)$ and $g^\star(p^\star) \in f(\succeq)$.

Note that it does not follow from this result that in an analysis of Nash implementation we can restrict attention to games in which each player announces a preference profile, since the game that truthfully Nash - implements the choice rule may have non - truthful Nash equilibria that generate outcomes different from that dictated by the choice rule. Note also that it is essential that the set of actions of each player be the set of preference profile, not the (smaller) set of preference relations, as in part (b) of the revelation principle for DSE - implementation (Lemma 181.4).

[1]Rinvio chi fosse interessato a vedere quanto detto negli appunti sugli equilibri correlati a proposito di due definizioni di equilibrio correlato e sul fatto che la prima risulta essere "sufficiente"

We now define a key condition in the analysis of Nash implementation.

DEFINITION 186.1 A choice rule $f : \mathcal{P} \to C$ is **monotonic** if whenever $c \in f(\succeq)$ and $c \notin f(\succeq')$ there is some player $i \in N$ and some outcome $b \in C$ such that $c \succeq_i b$ and $b \succ'_i c$.

That is, in order for an outcome c to be selected by a monotonic choice rule when the preference profile is $\succeq$ but not when it is $\succeq'$ the ranking of c relative to some other alternative must be worse under $\succeq'$ than under $\succeq$ for at least one individual.

An example of a monotonic choice rule f is that in which $f(\succeq)$ is the set of weakly Pareto efficient outcomes: $f(\succeq) = \{c \in C : \text{there is no } b \in C \text{ such that } b \succ_i c \quad \forall i \in N\}$. Another example is the rule f in which that $f(\succeq)$ consists of every outcome that is a favorite of at least one player: $f(\succ) = \{c \in C : \text{ there exists } i \in N \text{ such that } c \succeq_i b \quad \forall b \in C\}$.

PROPOSITION 186.2 Let $(N, C, \mathcal{P}, \mathcal{G})$ be an environment in which $\mathcal{G}$ is the set of strategic game forms. If a choice rule is Nash-implementable then it is monotonic.

Proof. Suppose that the choice rule $f : \mathcal{P} \to C$ is Nash-implemented by a game form $G = (N, (A_i), g), c \in f(\succeq)$, and $c \notin f(\succeq')$. Then there is an action profile a for which $g(a) = c$ that is a Nash equilibrium of the game $(G, \succeq)$ but not of $(G, \succeq')$. That is, there is a player j and action $a'_j \in A_j$ such that $g(a_{-j}, a'_j) \succ'_j g(a)$ and $g(a) \succeq_j g(a_{-j}, a'_j)$. Hence f is monotonic.

EXAMPLE 186.3 (*Solomon's predicament*) The biblical story of the Judgement of Solomon illustrates some of the main ideas of implementation theory. Each of two woman, 1 and 2, claims a baby; each of them knows[2] who is the true mother, but neither can prove her motherhood. Solomon tries to educe

[2] Si noti l'importanza di questa osservazione: è ragionevole assumere che per i due individui coinvolti (le due donne) le loro preferenze siano conoscenza comune. Quindi è appropriato pensare di modellizzare la situazione come gioco ad informazione *completa*. Naturalmente, d'altro lato, Re Salomone non conosce le preferenze (sennò dedurrebbe immediatamente chi è la vera madre). Meno rilevante per quello che stiamo facendo è l'aspetto di non *verificabilità* "davanti al giudice" di chi sia la vera madre: ma certo, se esistesse questo sistema (dall'analisi del DNA, a quesi tempi non disponibile, alla testimonianza di ostetriche o di conoscenti), Re Salomone potrebbe usarlo per conoscere chi sia la vera madre. Ottenendo quindi una soluzione al suo problema che sfugge a questo tipo di analisi. In generale, sarà appropriato assumere che l'informazione a disposizione del "pianificatore" tenga già conto di tutto ciò cui si può giungere utilizzando meccanismi "altri".

the truth by threatening to cut the baby in two, relying on the fact that the false mother prefers this outcome to that in which the true mother obtains the baby while the true mother prefers to give the baby away than to see it cut in two. Solomon can give the baby to either of the mothers or order its execution.
Formally, let a be the outcome in which the baby is given to mother 1, b that in which the baby is given to mother 2, and d that in which the baby is cut in two. two preference profiles are possible:

$$\theta \text{ (1 is the real mother): } a \succ_1 b \succ_1 d \text{ and } b \succ_2 d \succ_2 a$$
$$\theta' \text{ (2 is the real mother): } a \succ_1' d \succ_1' b \text{ and } b \succ_2' a \succ_2' d.$$

Despite Solomon's alleged wisdom, the choice rule f defined by $f(\theta) = \{a\}$ and $f(\theta') = \{b\}$ is not Nash - implementable, since it is not monotonic: $a \in f(\theta)$ and $a \notin f(\theta')$ but there is no outcome y and player $i \in N$ such that $a \succ_i y$ and $y \succ_i' a$. (In the biblical story Solomon succeeds in assigning the baby to the true mother: he gives it to the other woman than be cut in two. Probably the women did not perceive Solomon's instructions as a strategic game form).

INSERTO MIO

Proviamo a "toccare con mano" che alcune game form in forma strategica non danno il risultato desiderato.

Per comodità di rappresentazione, utilizzerò nei giochi le seguenti funzioni di utilità per rappresentare le preferenze:
1 è la vera madre, cioè: $a \succ_1 b \succ_1 d$ and $b \succ_2 d \succ_2 a$. Per 1 uso la seguente funzione di utilità: $u_1(a) = 2$, $u_1(b) = 1$, $u_1(d) = 0$; $u_2(a) = 0$, $u_2(b) = 2$, $u_2(d) = 1$. Il che fa sì che ai tre esiti possibili siano associati i seguenti profili di payoff: $a \mapsto (2, 0)$, $b \mapsto (1, 2)$, $d \mapsto (0, 1)$.
2 è la vera madre, cioè: $a \succ_1' d \succ_1' b$ and $b \succ_2' a \succ_2' d$. Per 1 uso la seguente funzione di utilità: $u_1'(a) = 2$, $u_1'(b) = 0$, $u_1'(d) = 1$; $u_2'(a) = 1$, $u_2'(b) = 2$, $u_2'(d) = 0$. Il che fa sì che ai tre esiti possibili siano associati i seguenti profili di payoff: $a \mapsto (2, 1)$, $b \mapsto (0, 2)$, $d \mapsto (1, 0)$.

Proviamo a vedere quattro esempi.

La prima "game form" è piuttosto drastica...

1\2	y_1
x_1	a

Cioè, il bimbo viene assegnato d'imperio alla signora 1. Non c'è bisogno di scrivere i giochi per capire che questi giochi avranno sempre e comunque un unico equilibrio di Nash, cui *corrisponde* l'esito che assegna il bimbo alla signora 1, sia quando lei è la vera madre che quando non lo è. Scrivo comunque, per curiosità, i due giochi risultanti (a sinistra, quando 1 è la vera madre, a destra il caso in cui la vera madre è 2).

1\2	y_1
x_1	$2, 0$

1\2	y_1
x_1	$2, 1$

Vediamo un'altra game form:

1\2	y_1	y_2
x_1	a	d
x_2	d	b

Vediamo che giochi otteniamo. Anche qui, a sinistra c'è il caso in cui 1 è la vera madre.

1\2	y_1	y_2
x_1	$2, 0$	$0, 1$
x_2	$0, 1$	$1, 2$

1\2	y_1	y_2
x_1	$2, 1$	$1, 0$
x_2	$1, 0$	$0, 2$

Come si può agevolmente verificare, se la vera madre è 1, abbiamo che l'equilibrio è (x_2, y_2), quindi il risultato è b, quindi il bimbo è assegnato a 2.

Non va bene!

Vediamo un terzo esempio:

1\2	y_1	y_2	y_3
x_1	a	b	d
x_2	b	d	a
x_3	d	a	b

Di nuovo, vediamo che giochi otteniamo. Il caso in cui 1 è la vera madre è sempre quello a sinistra.

1\2	y_1	y_2	y_3
x_1	$2,0$	$1,2$	$0,1$
x_2	$1,2$	$0,1$	$2,0$
x_3	$0,1$	$2,0$	$1,2$

1\2	y_1	y_2	y_3
x_1	$2,1$	$0,2$	$1,0$
x_2	$0,2$	$1,0$	$2,1$
x_3	$1,0$	$2,1$	$0,2$

Nessuno di questi due giochi ha equilibrio di Nash (in strategie pure, s'intende!). Quindi, questo ultimo meccanismo addirittura non produce nessun esito, quindi tanto meno l'esito voluto.

L'ultimo esempio che propongo cerca di usare una forma strategica "abbastanza vicina" ad una possibile interpretazione della storiella biblica. Le strategie sono le seguenti (per il giocatore 1; per 2 sono le "gemelle"):

x_1 = mio
x_2 = suo
x_3 = mio, ma se anche l'altra lo reclama, datelo a lei

La "game form" è:

$1 \backslash 2$	y_1	y_2	y_3
x_1	d	a	a
x_2	b	d	b
x_3	b	a	d

Otteniamo i due giochi seguenti. Il caso in cui 1 è la vera madre è sempre quello a sinistra.

$1 \backslash 2$	y_1	y_2	y_3
x_1	$0, 1$	$2, 0$	$2, 0$
x_2	$1, 2$	$0, 1$	$1, 2$
x_3	$1, 2$	$2, 0$	$0, 1$

$1 \backslash 2$	y_1	y_2	y_3
x_1	$1, 0$	$2, 1$	$2, 1$
x_2	$0, 2$	$1, 0$	$0, 2$
x_3	$0, 2$	$2, 1$	$1, 0$

Si vede che il gioco di sinistra ha due equilibri di Nash: (x_2, y_1) e (x_3, y_1), che danno entrambi lo stesso esito, ovvero b. Quello di destra ha come equilibri (x_1, y_2) e (x_1, y_3), che danno entrambi lo stesso esito, stavolta a. Quindi riusciamo ad implementare una choice rule. Peccato che sia la choice rule la quale assegna il bimbo alla donna che *non* è la vera madre!