QUESTI APPUNTI sono di Anna Torre (e si nota anche dalle notazioni diverse, oltre che per lo stile).
Li metto a disposizione per chi voglia leggerli...
Assieme alla mia paginetta dove si dimostra la rettangolarità e che i payoff dono tutti uguali in ogni equilibrio offrono i risultati di base.

GIOCHI A SOMMA ZERO

4-3-2002

Definizione 1 *Un gioco G si dice a somma zero se per ogni terminazione del gioco la somma dei payoff è nulla. In altre parole tutto quello che viene guadagnato da qualche giocatore viene perso da qualche altro giocatore.*

Nel caso più semplice a due giocatori la matrice dei pagamenti può essere espressa indicando la vincita, positiva o negativa, del primo giocatore poichè la vincita del secondo è in ogni caso l'opposto. Si può utilizzare una matrice A in cui la riga i è associata alla strategia s_i del giocatore I, la colonna j alla strategia s_j del giocatore II e l'elemento a_{ij} rappresenta quanto il primo giocatore riceve dal secondo se giocano la coppia di strategie (s_i, s_j).

Definizione 2 *La rappresentazione tramite la matrice A è detta forma normale.*

Equilibrio di Nash per un gioco a due giocatori a somma zero in forma normale

In questo caso un equilibrio di Nash è rappresentato da una coppia di strategie s_i e s_j tali che l'elemento aij risulta essere il più grande della colonna j e il pi piccolo della riga i; l'equilibrio viene detto anche punto di sella.

ESEMPIO

Punto di sella

6	3	4
5	2	-2
7	-1	3

Nel gioco in forma normale rappresentato la strategia (s_1, s_2) costituisce un equilibrio anche se entrambi i giocatori hanno a disposizione dei payoff migliori.

L'esistenza di un punto di sella o equilibrio di Nash non impone ai giocatori la scelta delle corrispondenti strategie; nell'esempio precedente il giocatore I sa di poter ottenere payoff superiori a 3 unità e il giocatore II sa di poter pagare payoff inferiori a 3 unità; d'altra parte il giocatore I sa che scegliendo la terza strategia può ottenere 7 unità ma può pagarne 1 se il giocatore II sceglie la seconda strategia e il giocatore II sa che scegliendo la terza strategia può ottenere 2 unità ma può pagarne 4 se il giocatore I sceglie la prima strategia.

Teorema 1 *In un gioco a due persone a somma zero se* (s_i, s_j) *e* (s_h, s_k) *sono equilibri di Nash, allora lo sono anche* (s_i, s_k) *e* (s_h, s_j).

Esempio - Equilibri multipli

2	1	1	4
5	1	1	2
3	-1	0	-1

Nel gioco in forma normale rappresentato la strategia (s_1, s_2) costituisce un equilibrio anche se entrambi i giocatori hanno a disposizione dei payoff migliori.

Osservazione

Nel caso in cui il gioco non sia a somma zero il precedente teorema non sussiste, come nel caso della battaglia dei sessi.

L'obiettivo dei giocatori è massimizzare il proprio payoff, cioè massimizzare la vincita o minimizzare la perdita; se i giocatori scelgono s_i e s_j, con payoff a_{ij} il giocatore I cerca di massimizzarlo intervenendo solo sulla scelta di s_i e il giocatore II cerca di minimizzarlo intervenendo solo sulla scelta di s_j. La non conoscenza della strategia scelta dall'altro giocatore impedisce di poter raggiungere con certezza l'obiettivo, ma l'esistenza di un punto di sella fa si che ragionevolmente entrambi scelgano quella coppia di strategie.

Gioco a due giocatori a somma zero senza equilibri di Nash in strategie pure

La maggior parte dei giochi non ha punti di sella, come il gioco seguente:

4	2
1	3

In questo caso il primo giocatore con la prima strategia si garantisce una vincita minima 2 e il secondo giocatore con la seconda strategia si garantisce una perdita massima 3 .

La vincita minima per il giocatore I si indica con v'_I e si ha: $v'_I = max_i\{min_j a_{ij}\}$

La perdita massima per il giocatore II si indica con v'_{II} e si ha: $v'_I = min_j\{max_i a_{ij}\}$

È facile verificare che $v'_I \leq v'_{II}$ e se $v'_I = v'_{II}$ allora esiste un punto di sella, che è un equilibrio di Nash.

In generale un comportamento "razionale" fa si che il giocatore I vinca almeno v'_I e il giocatore II perda al più v'_{II} e il risultato è il peggiore se l'altro giocatore può sfruttare la "razionalità" e prevedere la mossa. Pertanto per migliorare il risultato è necessario non giocare "razionalmente", cioè non giocare solo la strategia di vincita minima o di perdita massima.

Esempio - Pari e dispari modificato I due giocatori possono lanciare 1, 2, 3; il giocatore I vince se la somma dei numeri è pari, altrimenti vince il giocatore II. Apparentemente il gioco è favorevole al giocatore I che può vincere in 5 casi su 9. D'altra parte il giocatore II potrebbe giocare 2 e quindi avrebbe 2 risultati vincenti su 3; ma a questo punto il giocatore I giocando 2 è "sicuro" di vincere. Analogamente il giocatore I potrebbe giocare 1 (o 3) per avere 2 risultati vincenti su 3 e a questo punto il giocatore II giocando 2 "sicuro" di vincere. . Cercare di aumentare le proprie possibilità di vincere porta alla sconfitta "sicura".

STRATEGIE MISTE

Definizione 3 *Si chiama strategia mista per un giocatore una distribuzione di probabilità sull'insieme delle sue strategie (pure).*

Nell'esempio precedente il giocatore II che parte svantaggiato può riequilibrare le sue possibilità giocando a caso, con probabilità 0.5 sia 1 che 2 (o altre strategie equivalenti); in questo modo il primo giocatore non può in alcun modo avere maggiori probabilità di vincere. Se l'insieme delle strategie pure è formato da n elementi una strategia mista si può indicare con un vettore $x = (x_1, x_2, , x_n)$ con $x_i \geq 0$ e $\sum_{i=1,..n} x_i = 1 = 0$.

L'insieme delle strategie miste del giocatore I si indica con X e l'insieme delle strategie miste del giocatore II si indica con Y.

Definizione 4 *Dato un gioco G a due giocatori a somma zero in forma normale con matrice A è detta vincita attesa se il giocatore I gioca la strategia mista x e il giocatore II gioca la strategia mista y la quantit:*

$A(x, y) = \sum_{i=1,...,n} \sum_{j=1,...,m} x_i A_{ij} y_j = x^T Ay$

È possibile definire la vincita minima per il giocatore I se sceglie la strategia mista $x \in X$ come: $v(x) = min_{y \in Y} x^T Ay = min_j x^T A_{.j}$ e la perdita massima per il giocatore II se sceglie la strategia mista $y \in Y$ come:

$v(y) = max_{x \in X} x^T Ay = max_i A_{i.} y$ dove $A_{.j}$ e $A_{i.}$ sono la colonna j e la riga i di A e le seconde uguaglianze derivano dal fatto che il minimo e il massimo cercato si ottengono con strategie pure. L'obiettivo del giocatore I è massimizzare v(x) ottenendo la quantità: $v_I = max_{x \in X} min_j x^T A_{.j}$ e quello del giocatore II è minimizzare v(y) ottenendo la quantità: $v_{II} = min_{y \in Y} max_i A_{i.} y$

Definizione 5 *La strategia mista x che permette al giocatore I di ottenere v_I è detta maximin; la strategia mista che permette al giocatore II di ottenere v_{II} è detta minimax. v_I e v_{II} sono detti valore del gioco per i giocatori I e II.*

Teorema 2 *Teorema del minimax (von Neumann, 1928) $v_I = v_{II}$.*

Osservazione

Nel caso in cui il gioco non sia a somma zero il precedente teorema non sussiste.