

## 1 Esempio di belief non coerenti

Consideriamo il seguente esempio di belief. Nella tabella che segue sono rappresentati  $p^I, p^{II}$ . Per la precisione, nella parte sinistra delle caselle si leggono (per riga) i belief dei tipi del giocatore  $I$  rispetto ai tipi del giocatore  $II$ ; viceversa, nella parte destra delle caselle si leggono (per colonna) i belief dei tipi del giocatore  $II$  rispetto ai tipi del giocatore  $I$ .

	II.1	II.2	II.3
I.1	1/3:1/4	2/3:3/4	0:1/2
I.2	1/3:3/4	1/3:1/4	1/3:1/2

Questi belief corrispondono al caso coerente? Cioè se si possono trovare 6 numeri che mi permettono di ricostruire (attraverso probabilità condizionata) la tabella precedente?

	II.1	II.2	II.3
I.1	$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{13}$
I.2	$p_{21}$	$p_{22}$	$p_{23}$

Vediamo se sono belief coerenti

Per esserlo deve essere (supponendo che tutte le quantità al denominatore siano strettamente positive; se una di queste si annulla, la corrispondente equazione non ci interessa più (per fortuna), in quanto non abbiamo alcun vincolo sulla probabilità condizionata; la trattazione di questi dettagli viene fatta in fondo).

$$\frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}} = 1/3 \quad \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}} = 2/3 \quad \frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}} = 0$$

$$\frac{p_{21}}{p_{21}+p_{22}+p_{23}} = 1/3 \quad \frac{p_{22}}{p_{21}+p_{22}+p_{23}} = 1/3 \quad \frac{p_{23}}{p_{21}+p_{22}+p_{23}} = 1/3$$

$$\begin{aligned} \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{21}} &= 1/4 & \frac{p_{21}}{p_{11}+p_{21}} &= 3/4 \\ \frac{p_{12}}{p_{12}+p_{22}} &= 3/4 & \frac{p_{22}}{p_{12}+p_{22}} &= 1/4 \\ \frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} &= 1/2 & \frac{p_{23}}{p_{13}+p_{23}} &= 1/2 \end{aligned}$$

Notiamo subito che da  $\frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}} = 0$  otteniamo  $p_{13} = 0$ .

Ma questo è incompatibile con  $\frac{p_{13}}{p_{13}+p_{23}} = 1/2$ .

Quindi questo non è un caso di belief coerenti.

Vediamo i casi “degeneri” lasciati in sospeso.

Se  $p_{11} + p_{12} + p_{13} = 0$ , ne segue immediatamente che  $p_{11} = p_{12} = p_{13} = 0$  (visto che si tratta di quantità maggiori o uguali a zero). Segue anche che  $p_{21} + p_{22} + p_{23} = 1$ . Dalla seconda riga della matrice data, si ricava (usando la definizione di probabilità condizionata) che deve essere  $p_{21} = p_{22} = p_{23} = 1/3$ . Abbiamo ricavato, in particolare, che  $p_{11} = 0$  e che  $p_{21} = 1/3$ . Ma allora da questo ricaveremmo che i belief di *II.1* sarebbero che *I* è del tipo 1 con probabilità 1 e del tipo 2 con probabilità 0. Il che non corrisponde ai dati.

L'altro caso “degenere” si tratta in modo assolutamente analogo. Ecco i dettagli per pigri e diffidenti.

Se  $p_{21} + p_{22} + p_{23} = 0$ , si ha che  $p_{21} = p_{22} = p_{23} = 0$ . Segue anche che  $p_{11} + p_{12} + p_{13} = 1$ . Dalla prima riga della matrice data, si deduce che  $p_{11} = 1/3$ ,  $p_{12} = 2/3$  e  $p_{13} = 0$ .

Abbiamo quindi che  $p_{11} = 1/3$  e  $p_{21} = 0$ . Anche in questo caso ricaveremmo che i belief di *II.1* sarebbero che *I* è del tipo 1 con probabilità 1 e del tipo 2 con probabilità 0. Il che non corrisponde ai dati.