1 Esercisi sparsi svolti di Teoria dei Giochi

Esercizio 1.1 Dilemma del prigioniero in strategie miste.

$I \backslash II$	q A	$1-q$ B
p A	3 3	0 5
$1-p$ B	5 0	1 1

L'equilibrio di Nash in strategie pure è (B, B), calcoliamolo nel caso di strategie miste.

$$u_I(p,q) = 3pq + 0p(1-q) + 5(1-p)q + 1(1-p)(1-q) = -pq + q - p + 1$$

quindi $u_I(p,\bar{q}) = -p(\bar{q}+1) + 4\bar{q} + 1$

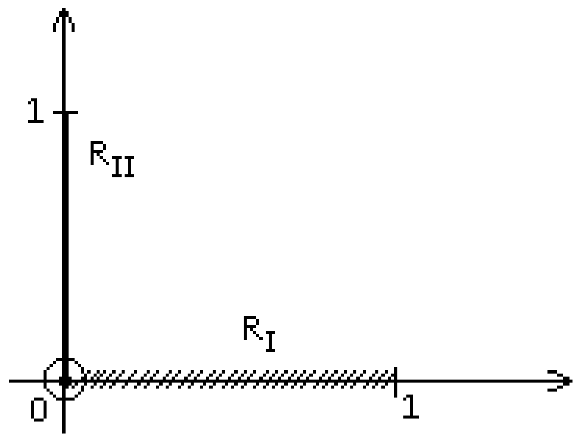
$$\Longrightarrow argmax_{p\in[0,1]}\ u_I(p,\bar{q}) = argmax_{p\in[0,1]}\ \{-p(\bar{q}+1) + 4\bar{q} + 1\} = 0$$

$$u_{II}(p,q) = 3pq + 5p(1-q) + 0(1-p)q + 1(1-p)(1-q) = -pq + 4p - q + 1$$

quindi $u_{II}(\bar{p},q) = -q(\bar{p}+1) + 4\bar{p} + 1$

$$\Longrightarrow argmax_{q\in[0,1]}\ u_{II}(\bar{p},q) = argmax_{q\in[0,1]}\ \{-q(\bar{p}+1) + 4\bar{p} + 1\} = 0$$

Potevamo osservarlo prima che le funzioni d'utilità dei due giocatori venivano uguali, perché il gioco è simmetrico, quindi $u_I(x,y) = u_{II}(y,x)$.



L'equilibrio di Nash si ottiene per $(p,q) = (0,0)$, che coincide con la coppia (B, B). È lo stesso NE che si aveva in strategie pure.

Definizione 1.1 (Gioco simmetrico). Per avere un gioco simmetrico occorre innanzitutto che i giocatori abbiano lo spazio delle strategie uguali. In tal caso un gioco a 2 giocatori si dice simmetrico se

$$u_I(x,y) = u_{II}(y,x) \quad \forall (x,y) \in X \times Y$$

Osservazione 1.1 Se un gioco G è simmetrico e la coppia $(\bar{x}, \bar{y})$ è un equilibrio di Nash, allora anche la coppia $(\bar{y}, \bar{x})$ è un equilibrio di Nash.

Esempio 1.1 (Pari e dispari). È un gioco a somma zero (se uno vince, l'altro perde).

$I \backslash II$	P	D
P	$1 \quad -1$	$-1 \quad 1$
D	$-1 \quad 1$	$1 \quad -1$

È simmetrico?

$$u_I(P,P) = 1 \neq -1 = u_{II}(P,P)$$

Non è simmetrico

Lo si poteva notare anche da

$$u_I(P,D) = -1 \neq 1 = u_{II}(D,P)$$

Consideriamo ora un'altro gioco.

Esempio 1.2

$I \backslash II$	A	B
A	$1 \quad 99$	$-1 \quad 101$
B	$-1 \quad 101$	$1 \quad 99$

È stata traslata la funzione di utilità del giocatore II rispetto al gioco precedente. È un gioco a somma costante. Non è simmetrico.

Esercizio 1.2 (Battaglia dei sessi).

$I\backslash II$	L	R
T	3 1	0 0
B	0 0	1 3

Non è un gioco simmetrico, basta osservare i valori sulla diagonale.

Gli equilibri di Nash in strategie pure sono (T, L) e (B, R).
Cerchiamo gli equilibri in strategie miste.

$$u_I(p,q) = 3pq + 0p(1-q) + 0(1-p)q + 1(1-p)(1-q) = 4pq - q - p + 1$$

$$u_{II}(p,q) = 1pq + 0p(1-q) + 0(1-p)q + 3(1-p)(1-q) = 4pq - 3p - 3q + 3$$

quindi

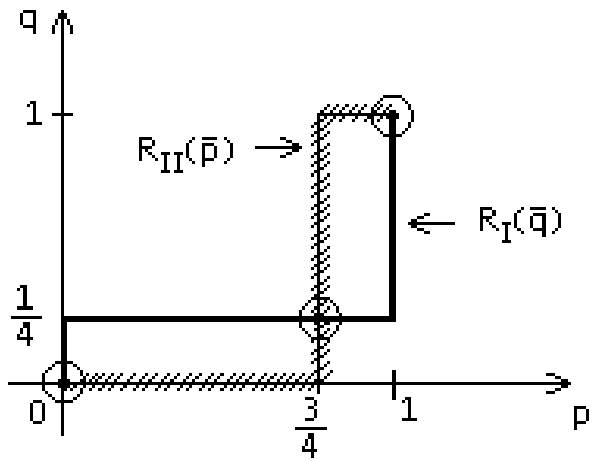
$$u_I(p,\bar{q}) = p(4\bar{q}-1) - \bar{q} + 1$$

$$u_{II}(\bar{p},q) = q(4\bar{p}-3) - 3\bar{p} + 3$$

allora

$$R_I(\bar{q}) = argmax_{p\in[0,1]}\ \{p(4\bar{q}-1) - \bar{q} + 1\} = \begin{cases} p = 1 & 4\bar{q} - 1 > 0 \\ [0,1] & 4\bar{q} - 1 = 0 \\ p = 0 & 4\bar{q} - 1 < 0 \end{cases}$$

$$R_{II}(\bar{p}) = argmax_{q\in[0,1]}\ \{q(4\bar{p}-3) - 3\bar{p} + 3\} = \begin{cases} q = 1 & 4\bar{p} - 1 > 0 \\ [0,1] & 4\bar{p} - 1 = 0 \\ q = 0 & 4\bar{p} - 1 < 0 \end{cases}$$



Gli equilibri di Nash sono $(0,0)$, $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, $(1,1)$.
Se $(p,q) = (0,0)$ allora ritrovo (B,R) con payoff $(1,3)$.
Se $(p,q) = (1,1)$ allora ritrovo (T,L) con payoff $(3,1)$.
Se $(p,q) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ allora il payoff che ottengo è dato da:

$$u_I(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{3}{4}, \quad u_{II}(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{3}{4}$$

ma la coppia $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ è un risultato inefficiente perché entrambi i giocatori preferiscono i payoff che riescono a garantirsi in strategie pure.

Esercizio 1.3 (Eliminazione iterata di strategie strettamente dominate nel duopolio di Cournot). Ricordo che nel duopolio di Cournot ci sono:

2 imprese = 2 giocatori
strategie = diverse quantità prodotte
$X = Y = [0, +\infty)$ spazio delle strategie.

$$\varphi_1(x, y) = x\{a - (x + y) - k\}$$

$$\varphi_2(x, y) = y\{a - (x + y) - k\}$$

dove φ_i per $i = 1, 2$ è il payoff dei due giocatori (cioè i profitti).

x = quantità di merce prodotta dall'impresa I

y = quantità di merce prodotta dall'impresa II

Il prezzo di mercato è:

$$P(Q) = P(x + y) = \begin{cases} a - (x + y) & \text{se } \ x + y < a \\ 0 & \text{se } \ x + y \geq a \end{cases}$$

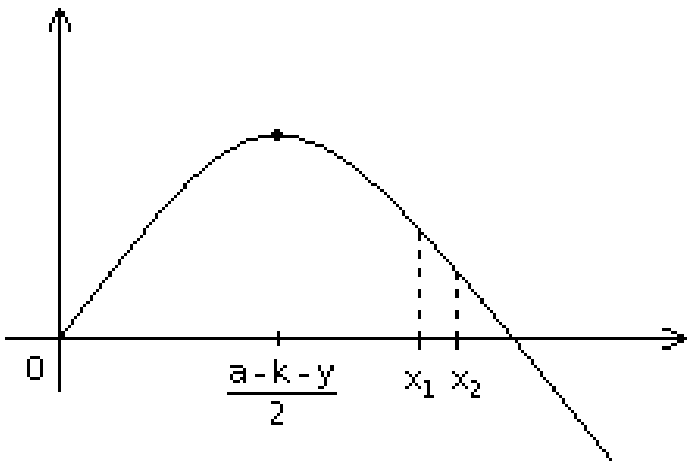
e il costo totale dell'impresa i per produrre q_i è $k_i(q_i) = kq_i$ (con k costo marginale).

Osserviamo che x_1 domina x_2 se

$$\varphi_1(x_1, y) > \varphi_1(x_2, y) \quad \forall y \in [0, +\infty)$$

Si vuole determinare una strategia x_1 che domina ogni altra strategia x_2, con $x_2 > x_1$, cioè l'Estremo Destro del Primo Passo:

$$-x_1^2 + (a - k - y)x_1 > -x_2^2 + (a - k - y)x_2 \quad \forall y \in [0, +\infty], \ \text{ con } \ x_2 > x_1$$



cioè la funzione $f(x) = -x^2 + (a - k - y)x$ decresce a destra del vertice, cioè

$$x_1 \geq \frac{a-k-y}{2} \quad \forall y \geq 0$$

quindi

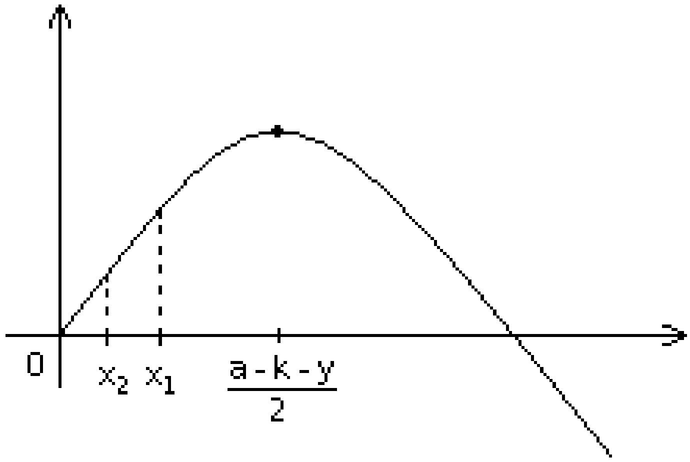
$$x_1 \geq \sup_{y\in[0,+infty)} \frac{a-k-y}{2} = \frac{a-k}{2}$$

allora $\frac{a-k}{2}$ domina tutte le strategie maggiori, cioè è l'estremo destro del primo passo.

Ora si vuole determinare l'Estremo Sinistro del Primo Passo, cioè x_1 tale che:

$$\varphi_1(x_1, y) > \varphi_1(x_2, y) \quad \forall y \in [0, \tfrac{a-k}{2}] \text{ e } \forall x_2 \in [0, x_1]$$

N.B.: In $\forall y \in [0, \frac{a-k}{2}]$, conosco $\frac{a-k}{2}$ dal conto precedente, perché il discorso è simmetrico per i due giocatori.



allora

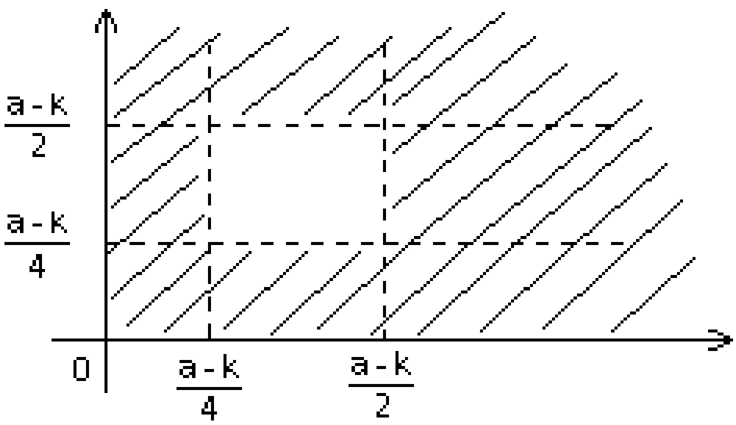
$x_1 \leq \frac{a-k-y}{2} \quad \forall y \in [0, \frac{a-k}{2}]$

cioè

$x_1 \leq \inf_y \frac{a-k-y}{2} = \frac{a-k-\frac{a-k}{2}}{2} = \frac{a-k}{4}$

cioè $\frac{a-k}{4}$ domina tutte le strategie minori.

La situazione a questo punto è la seguente.



Si vogliono determinare (in generale) a_n e b_n, rispettivamente estremo sinistro ed estremo destro del passo $n-$esimo.

x_1 domina x_2 $\forall x_2 \in [x_1, b_n]$ se

$\varphi_1(x_1, y) = x_1(a-k-x_1-y) > \varphi_1(x_2, y) = x_2(a-k-x_2-y)$ $\forall y \in [a_n, b_n]$ e $\forall x_2 \in [x_1, b_n]$

$x_1 \geq \frac{a-k-y}{2} \quad \forall y \in [a_n, b_n]$

se e solo se

$x_1 \geq \sup_{[a_n, b_n]} \frac{a-k-y}{2} = \frac{a-k-a_n}{2} = b_{n+1}$

estremo destro del passo $(n+1)-$esimo.
(Per costruzione b_n è decrescente).

Determiniamo ora l'estremo sinistro del passo $(n+1)-$esimo.

x_1 domina x_2 $\forall x_2 \in [a_n, x_1]$

se e solo se

$$\varphi_1(x_1, y) > \varphi_1(x_2, y) \;\; \forall y \in [a_n, b_n] \;\; \text{e} \;\; \forall x_2 \in [a_n, x_1]$$

questo avviene se

$x_1 \leq \frac{a-k-y}{2} \quad \forall y \in [a_n, b_{n+1}]$

$x_1 \leq \inf_{y \in [a_n, b_{n+1}]} \frac{a-k-y}{2} = \frac{a-k-b_{n+1}}{2} = a_{n+1}$

estremo sinistro del passo $(n+1)-$esimo.
(Per costruzione a_n è crescente).

Allora:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{a-k}{4} \\ a_{n+1} = \frac{a-k-b_{n+1}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = \frac{a-k}{2} \\ b_{n+1} = \frac{a-k-a_n}{2} \end{cases}$$

a_n e b_n sono rispettivamente una successione crescente e una decrescente.
Se a_n è limitata anche b_n è limitata (e viceversa); ma in realtà a_n e b_n sono in $[0, a]$, perché lo spazio delle strategie è $[0, a]$.
Con facili conti segue che:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{a-k}{4} \\ a_{n+1} = \frac{a-k+a_n}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = \frac{a-k}{2} \\ b_{n+1} = \frac{a-k+b_n}{4} \end{cases}$$

b_n è decrescente e limitata inferiormente, allora $b_n \longrightarrow m \in \mathbb{R}$
a_n è crescente e limitata superiormente, allora $a_n \longrightarrow l \in \mathbb{R}$

passando al limite in $a_{n+1} = \frac{a-k+a_n}{4}$, otteniamo $l = \frac{a-k+l}{4}$

$$\Longrightarrow \quad 3l = a-k \quad \Longrightarrow \quad l = \tfrac{a-k}{3}$$

e passando al limite in $b_{n+1} = \frac{a-k+b_n}{4}$, si ottiene $m = \frac{a-k+m}{4}$

$$\Longrightarrow \quad 3m = a-k \quad \Longrightarrow \quad m = \tfrac{a-k}{3}$$

quindi

$(a_n, b_n) \longrightarrow (\frac{a-k}{3}, \frac{a-k}{3})$ che è un Nash equilibrio, anzi è l'unico NE del gioco.

Si vuole determinare l'equilibrio di Nash senza l'eliminazione iterata.
Condizione necessaria:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = -2x + (a-k-y) = 0 \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = -2y + (a-k-x) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{a-k-y}{2} \\ -2y + (a-k-(\frac{a-k-y}{2})) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{a-k-y}{2} \\ -2y + (\frac{a-k}{2} + \frac{y}{2}) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{a-k-y}{2} \\ y = \frac{a-k}{3} \end{cases}$$

$$x = \frac{a-k-(\frac{a-k}{3})}{2} = \frac{\frac{2}{3}(a-k)}{2} = \frac{a-k}{3}$$

Il candidato al Nash è $(\frac{a-k}{3}, \frac{a-k}{3})$.

Si deve provare che:

a) $\varphi_1(\frac{a-k}{3}, \frac{a-k}{3}) \geq \varphi_1(x, \frac{a-k}{3}) \quad \forall x \in [0,a]$

b) $\varphi_2(\frac{a-k}{3}, \frac{a-k}{3}) \geq \varphi_2(\frac{a-k}{3}, y) \quad \forall y \in [0,a]$

Per *a*) dobbiamo avere

$$-\left(\frac{a-k}{3}\right)^2 + \left(a-k-\frac{a-k}{3}\right)\frac{a-k}{3} \geq -x^2 + \left(a-k-\frac{a-k}{3}\right)x$$

quindi

$$-\frac{(a-k)^2}{9} + \frac{2}{3}(a-k)\frac{a-k}{3} = \frac{(a-k)^2}{9} \geq -x^2 + \frac{2}{3}(a-k)x$$

cioè

$$x^2 - \frac{2}{3}(a-k)x + \frac{(a-k)^2}{9} \geq 0$$

che si riscrive come $\left(x - \frac{(a-k)}{3}\right)^2 \geq 0$.

L'equazione sopra è sempre vera.
Analoghi conti provano la b), quindi la coppia $(\frac{a-k}{3}, \frac{a-k}{3})$ è equilibrio di Nash.

Esercizio 1.4 Gioco a tre giocatori.

$I\backslash II$	A	B	C
A	2 0 1	2 0 1	2 0 1
B	2 0 1	1 2 0	2 0 1
C	2 0 1	2 0 1	0 1 2

$IIIA$

$I\backslash II$	A	B	C
A	2 0 1	1 2 0	2 0 1
B	1 2 0	1 2 0	1 2 0
C	2 0 1	1 2 0	0 1 2

$IIIB$

$I\backslash II$	A	B	C
A	2 0 1	2 0 1	0 1 2
B	2 0 1	1 2 0	0 1 2
C	0 1 2	0 1 2	0 1 2

$IIIC$

(Per trovare i massimi dei giocatori I e II si fissa una matrice e si procede come al solito, per trovare i massimi del giocatore III si fissa la strategia di I e II (per esempio AA) e poi si cerca il massimo spostandosi tra le tre matrici).

Le funzioni d'utilità dei tre giocatori sono $f_i : X \times Y \times Z \longrightarrow \mathbb{R} \quad i = 1, 2, 3$.

La terna $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ è un equilibrio di Nash se

$$f_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \geq f_1(x, \bar{y}, \bar{z}) \quad \forall x \in X$$

$$f_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \geq f_2(\bar{x}, y, \bar{z}) \quad \forall y \in Y$$

$$f_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \geq f_3(\bar{x}, \bar{y}, z) \quad \forall z \in Z$$

Gli equilibri di Nash sono (A, A, A), (A, B, A), (B, B, B), (A, C, C), (C, C, C).

Esercizio 1.5 (Modello di duopolio di Stackelberg). Stackelberg nel 1934 propose un modello dinamico di duopolio in cui un'impresa leader muove per prima e una subordinata o follower per seconda.

Ad un certo punto nella storia automobilistica USA, le General Motors sembra abbiano giocato un ruolo da leader.

Seguendo Stacklberg, noi sviluppiamo un modello sotto le ipotesi che le imprese scelgano le quantità come nel modello di Cournot, ma in modo sequenziale.

La progressione temporale del gioco è la seguente:

(1) l'impresa I sceglie la quantità $q_1 \geq 0$

(2) l'impresa II osserva q_1 e sceglie una quantità $q_2 \geq 0$

(3) il payoff dell'impresa i è dato dalla funzione profitto:

$$u_i(q_i, q_j) = q_i[P(Q) - c]$$

dove, le notazioni sono come nel modello di Cournot

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & \text{se } Q < a \\ 0 & \text{se } Q \geq a \end{cases}$$

$C_i(q_i) = c \cdot q_i \quad c \in \mathbb{R} \quad c =$ costo marginale di produzione

$Q = q_1 + q_2$

Per ricavare l'esito con l'induzione a ritroso di questo gioco, si calcoli dapprima la reazione dell'impresa II a una quantità arbitraria offerta dall'impresa I ($R_2(q_1)$) che verifica:

$$max_{q_2 \geq 0}\ u_2(q_1, q_2) = max_{q_2 \geq 0}\ q_2[a - (q_1 + q_2) - c]$$

quindi da $u_2(q_1, q_2) = -q_2^2 + (a - q_1 - c)q_2$ si ha

$$\frac{\partial u_2}{\partial q_2} = -2q_2 + (a - q_1 - c) = 0 \iff q_2 = \frac{a - c - q_1}{2}$$

(È condizione necessaria e sufficiente per il massimo)
allora $R_2(q_1) = \frac{a-c-q_1}{2}$ essendo $q_1 < a - c$

Confrontare con il modello di Cournot: è la stessa $R_2(q_1)$, ma qui è la reazione dell'impresa II alla quantità dell'impresa I mentre in Cournot $R_2(q_1)$ è la miglior risposta dell'impresa II alla quantità ipotizzata scelta da I.

Poiché l'impresa I può risolvere il problema allo stesso modo in cui lo risolve II, la I può anticipare che la quantità scelta q_1 incontrerà la reazione $R_2(q_1)$.

Allora il problema dell'impresa II al primo stadio del gioco equivale a:

$$max_{q_1 \geq 0}\ u_1(q_1, R_2(q_1)) = max_{q_1 \geq 0}\ q_1(a - q_1 - R_2(q_1) - c) =$$
$$= max_{q_1 \geq 0}\ q_1 \left(a - q_1 - c - \frac{a - q_1 - c}{2}\right) = max_{q_1 \geq 0}\ q_1 \left(\frac{a - q_1 - c}{2}\right) =$$
$$= max_{q_1 \geq 0} \left(\left(\frac{a-c}{2}\right) q_1 - \frac{1}{2} q_1^2\right)$$

che ci dà $q_1^* = \frac{a-c}{2}$ e $R_2(q_1^*) = \frac{a-c-q_1^*}{2} = \frac{a-c-\frac{a-c}{2}}{2} = \frac{a-c}{4}$

che è il risultato dell'induzione a ritroso nel gioco di Stackelberg.

Osservazione 1.2 Con il termine di equilibrio di Cournot e equilibrio di Bertrand ci si riferisce solitamente all'equilibrio di Nash dei giochi di Cournot e di Bertrand, con il termine equilibrio di Stackelberg si intende che il gioco è a mosse sequenziali e non simultanee.

Abbiamo visto studiando il gioco di Cournot che nell'equilibrio di Nash ogni impresa produce la quantità $\frac{a-c}{3}$, quindi la quantità aggregata nel gioco di Cournot è $Q_c = 2\frac{a-c}{3}$.
La quantità aggregata corrrispondente all'esito di "backwards induction del gioco di Stackelberg è $Q_s = \frac{a-c}{2} + \frac{a-c}{4} = \frac{3}{4}(a - c)$, quindi $Q_s > Q_c$; di conseguenza il prezzo di mercato sarà più basso nel gioco di Stackelberg.
Tuttavia nel gioco di Stackelberg l'impresa I avrebbe potuto scegliere la quantità di Cournot $\frac{a-c}{3}$, nel qual caso l'impresa II avrebbe dovuto rispondere con la quantità $\frac{a-c}{3}$.
Poiché nel gioco di Stackelberg l'impresa I avrebbe potuto ottenere il livello di profitto di Cournot, ma ha scelto di agire diversamente, significa che il profitto di I deve essere superiore di quello ottenuto in Cournot, infatti:

$$u_1(q_1^*, R_2(q_1^*)) = q_1^*\,(a - (q_1^* + R_2(q_1^*)) - c) = \frac{a-c}{2} \cdot \left(a - c - 3\frac{(a-c)}{4}\right) =$$
$$= \frac{a-c}{2} \cdot \frac{a-c}{4} = \frac{(a-c)^2}{8} > \frac{(a-c)^2}{9} \leftarrow \text{ profitto di Cournot}$$

Tuttavia il prezzo di mercato è più basso nel gioco di Stackelberg e cosí anche i profitti aggregati, di conseguenza il fatto che I stia meglio implica che II stia peggio, infatti:

$$u_2(q_1^*, R_2(q_1^*)) = \frac{a-c}{4} \cdot \left(a - c - \frac{3}{4}(a-c)\right) =$$
$$= \frac{(a-c)^2}{16} < \frac{(a-c)^2}{9} \leftarrow \text{ profitto di Cournot}$$

La conclusione che l'impresa II ha risultati peggiori nel gioco di Stackelberg rispetto a quello di Cournot illustra una differenza importante tra problemi decisionali che coinvolgono uno o più soggetti.
Nelle decisioni con un solo soggetto, il fatto di avere maggiori informazioni non può peggiorare lo stato di chi decide.
Nella TdG il fatto di avere un maggior numero di informazioni (o meglio, il fatto che gli altri giocatori sanno che un soggetto ha più informazioni) può peggiorare lo stato di un giocatore.
Nel gioco di Stackelberg l'impresa II conosce q_1 e I sa che II conosce q_1.
Per comprendere qual' è l'effetto di questa informazione, si consideri il gioco con mosse sequenziali modificato in cui l'impresa I sceglie q_1, dopo di che l'impresa II sceglie q_2, ma senza aver osservato q_1.
Se l'impresa II crede che l'impresa I ha scelto la quantità di Stackelberg $q_1^* = \frac{a-c}{2}$ allora la risposta ottima dell'impresa II è ancora $R_2(q_1^*) = \frac{a-c}{4}$.
Tuttavia se I anticipa che II avrà questa credenza e che sceglierà quella quantità, allora I preferisce giocare la propria risposta ottima a $\frac{a-c}{4}$, cioè:

$$max_{q_1}\ u_1\left(q_1, \tfrac{a-c}{4}\right) = max_{q_1}\ \left(-q_1^2 + \tfrac{3}{4}(a-c)q_1\right),$$

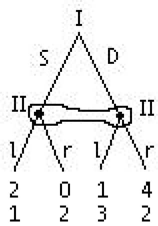
che si ottiene per $q_1 = \frac{3}{8}(a-c)$, piuttosto che la quantità di Stackelberg $\frac{a-c}{2}$.
In questo caso qual'è il profitto delle due imprese?

L'impresa I guadagna di più di quanto guadagna con l'equilibrio di Stackelberg, ma l'impresa II meno.
Allora non è plausibile che II creda che I abbia scelto la quantità di Stackelberg.

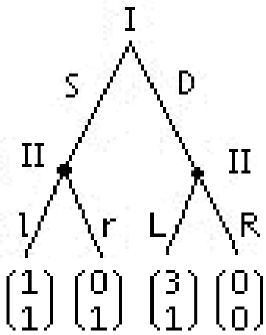
L'unico equilibrio di Nash di questo gioco con mosse sequenziali modificato è che entrambe le imprese scelgano la quantità $\frac{a-c}{3}$ (cioè l'equilibrio di Nash del gioco di Cournot in cui le imprese muovono contemporaneamente).

Esempio 1.3 Gioco statico rappresentato come gioco dinamico ad informazione imperfetta.

$I \backslash II$	l	r
S	2 1	0 2
D	1 3	4 2



Esempio 1.4 Gioco dinamico ad informazione perfetta (II sa dove si trova) e ad informazione completa.



Se S e D sono le strategie del giocatore I, quali sono quelle del giocatore II?

Definizione 1.2 Una strategia di un giocatore è un piano completo d'azione, cioè specifica un'azione ammissibile del giocatore in ogni circostanza in cui questi può essere chiamato ad agire.

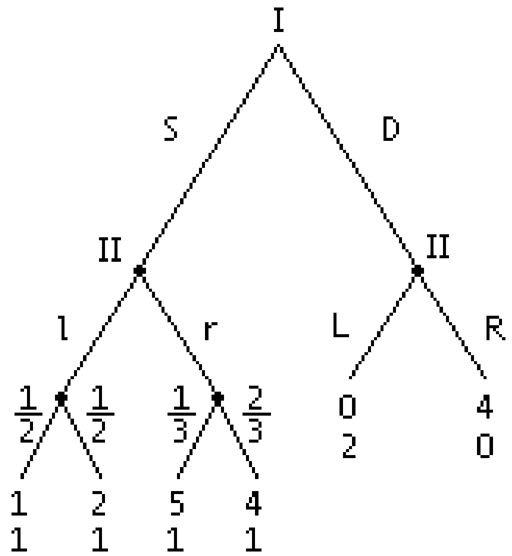
Quindi le strategie di II sono:

$$lL,\ rL,\ lR,\ rR,$$

dove la prima lettera indica cosa fa II quando I sceglie S e la seconda lettera indica cosa fa II quando I sceglie D.
Una volta viste le strategie si può scrivere il gioco in forma matriciale:

$I \backslash II$	lL	rL	lR	rR
S	1 1	0 1	1 1	0 1
D	3 1	3 1	0 0	0 0

Esempio 1.5 Consideriamo il seguente gioco in forma estesa:



Gioco dinamico ad informazione perfetta e completa.

$$S, l \longmapsto \begin{cases} \mathbb{E}(u_I) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ \mathbb{E}(u_{II}) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

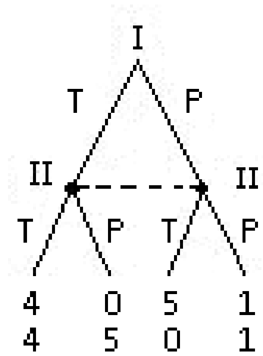
$$S, r \longmapsto \begin{cases} \mathbb{E}(u_I) = 5 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{13}{3} \\ \mathbb{E}(u_{II}) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = 1 \end{cases}$$

$I \backslash II$	lL	rL	lR	rR
S	$\frac{3}{2}$ 1	$\frac{13}{3}$ 1	$\frac{3}{2}$ 1	$\frac{13}{3}$ 1
D	0 2	0 2	4 0	4 0

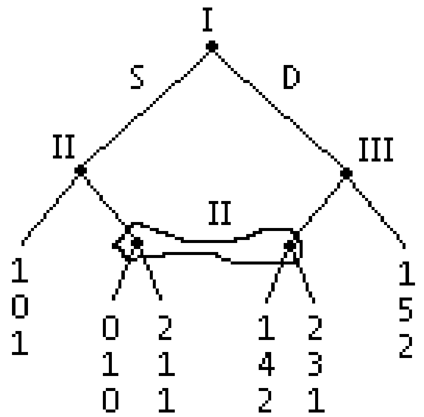
Esempio 1.6 (Dilemma del prigioniero).

$I \backslash II$	T	P
T	4 4	0 5
P	5 0	1 1

È un gioco statico ad informazione completa.
Rappresentato come gioco dinamico risulta ad informazione imperfetta.

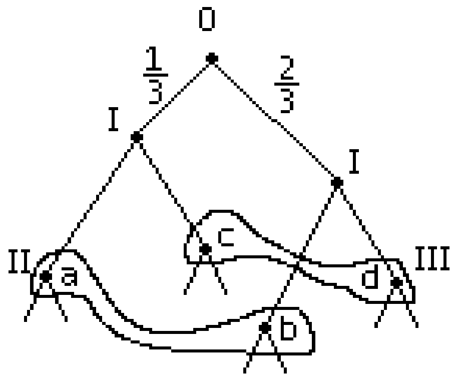


Esempio 1.7 Gioco a tre giocatori.



Questo albero non ha contraddizioni, perché II potrebbe essersi dimenticato se ha già giocato.

Esempio 1.8



È un gioco ad informazione non completa e imperfetta, I sa dove si trova, II sa distinguere se I è andato a destra o a sinistra, ma non sa esattamente in che nodo sia.

Esercizio 1.6 Si consideri il seguente gioco

$I \backslash II$	L	C	R
T	1 1	11 $\frac{1}{2}$	2 $\frac{3}{4}$
M	0 0	0 0	0 $\frac{1}{2}$
B	0 0	10 $\frac{1}{2}$	1 0

Trovare gli eventuali equilibri di Nash in strategie pure.
Cosa succede se I non può usare la strategia T, ovverossia se il gioco diventa questo?

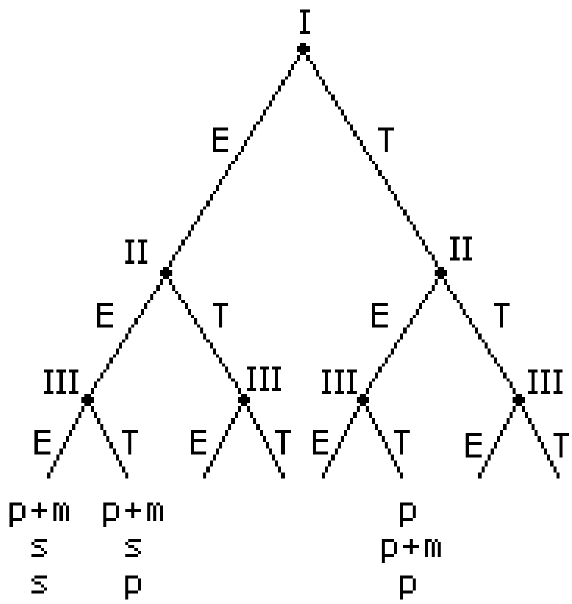
$I \backslash II$	L	C	R
M	0 0	0 0	0 $\frac{1}{2}$
B	0 0	10 $\frac{1}{2}$	1 0

Osservazione 1.3 L'aspetto interessante di questo esercizio è che la situazione di I migliora, avendo un insieme strettamente più piccolo di strategie.

Esercizio 1.7 (Gioco sull'induzione a ritroso). Il governo italiano desidera ridurre l'evasione fiscale. La legge punisce un evasore ogni anno. Il controllo avviene in ordine alfabetico. Siano I, II, III i tre giocatori, siano inoltre

$E =$	strategia di evadere le tasse	
$T =$	strategia di pagare le tasse	
$p =$	payoff del giocatore che paga subito le tasse	
$p + m =$		che evade le tasse, ma viene scoperto
$s =$		che riesce nell'evasione.

Disegnamo l'albero del gioco.



Le strategie di II sono $\{EE, ET, TE, TT\}$
Le strategie di III sono $\{EEEE, EEET, \ldots, \ldots\}$
In totale III ha 16 strategie.

(N.B.: $EEEE$ significa che III sceglie E se I sceglie E e II sceglie E
III sceglie E se I sceglie E e II sceglie T
III sceglie E se I sceglie T e II sceglie E
III sceglie E se I sceglie T e II sceglie T).

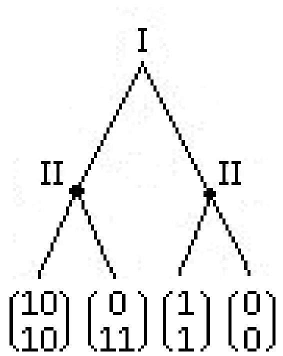
Per dimostrare che la strategia di pagare le tasse è ottimale per ogni giocatore osserviamo che

III sceglie E se II sceglie E e
III sceglie T se II sceglie T, inoltre
II sceglie E se I sceglie E e
II sceglie T se I sceglie T

e poiché I è il primo in ordine alfabetico, I sceglie T
$\Longrightarrow$ I, II, III scelgono T = pagare le tasse.

Esercizio 1.8 Trovare un gioco in forma estesa ad informazione perfetta tale che l'equilibrio ottenuto con induzione a ritroso non sia efficiente.

Una soluzione possibile è la seguente:



Esercizio 1.9 (sull'eliminazione iterata di strategie strettamente dominate).

$I \backslash II$	L	M_2	R
U	4 3	5 1	6 2
M_1	2 1	8 4	3 6
D	3 0	9 6	2 8

Se confrontiamo la strategia M_2 e R di II notiamo che II preferisce sempre R a M_2 perché $2 > 1,\ 6 > 4,\ 8 > 6$, allora II elimina M_2.
I sa che II elimina M_2 perché è conoscenza comune non giocare strategie strettamente dominate. Allora avremo

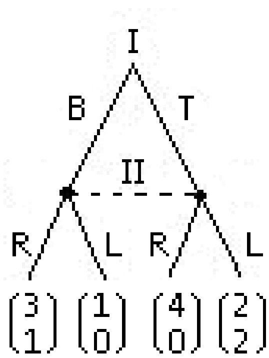
$I\backslash II$	L	R
U	4 3	6 2
M_1	2 1	3 6
D	3 0	2 8

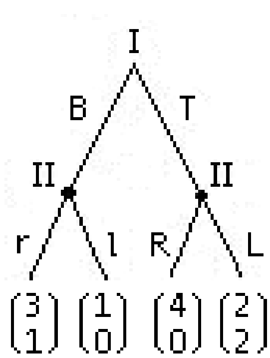
Ora I non giocherà né la strategia M_1, né D perché entrambe dominate strettamente dalla strategia U, quindi la situazione diventa

$I\backslash II$	L	R
U	4 3	6 2

II sa che I non gioca le strategie M_1 e D, allora giocherà la strategia L che domina R. Ci aspettiamo quindi che venga giocata la coppia (U, L).

Esempio 1.9 Consideriamo i due seguenti giochi.





$I\backslash II$	L	R
T	2 2	4 0
B	1 0	3 1

B è dominata.
Allora II gioca L
e l'equilibrio
darà i payoff $(2, 2)$.

$I\backslash II$	lL	lR	rL	rR
T	2 2	4 0	2 2	4 0
B	1 0	1 0	3 1	3 1

lR è dominata.
Poi lL ed rR sono debolmente dominate. Ci aspettiamo che II scelga rL. E allora I sceglie B.
I payoff sono $(3, 1)$.
(Se non è convincente l'eliminazione

di strategie debolmente dominate, si

noti comunque che (B, rL) è equilibrio perfetto nei sottogiochi).

Abbiamo un risultato paradossale. II nel gioco a destra è più informato, eppure ottiene in equilibrio un payoff peggiore. Dove sta il paradosso?

Esercizio 1.10

$I \backslash II$	L	R
U	2 0	−1 0
M	0 0	0 0
D	−1 0	2 0

Non ci sono strategie dominate né per I né per II. Ma I può pensare di giocare con probabilità $\frac{1}{2}$ U e con probabilità $\frac{1}{2}$ D, sia T tale strategia mista: $T = \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}D$.

$$f_I(T, L) = \tfrac{1}{2}2 + \tfrac{1}{2}(-1) = \tfrac{1}{2}$$

$$f_I(T, R) = \tfrac{1}{2}(-1) + \tfrac{1}{2}2 = \tfrac{1}{2}$$

Tale strategia mista domina strettamente la strategia M, anche se questa non era strettamente dominata da alcuna strategia pura.

Esercizio 1.11

$I \backslash II$	L	R
U	1 3	−2 0
M	−2 0	1 3
D	0 1	0 1

Non ci sono strategie strettamente dominate da alcuna strategia pura né per I né per II.
I può pensare di usare la strategia U con probabilità $\frac{1}{2}$ e M con probabilità $\frac{1}{2}$, sia $T = \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}M$.

$$f_I(T, L) = \tfrac{1}{2}1 + \tfrac{1}{2}(-2) = -\tfrac{1}{2} < 0$$

$f_I(T, R) = \frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{2}1 = -\frac{1}{2} < 0$

In questo caso una strategia mista (T) è strettamente dominata da una strategia pura (D).

Esercizio 1.12

$I\backslash II$	L	R
U	8 10	-100 9
D	7 6	6 5

I giocherà sicuramente U perché la preferisce a D: vediamo il perché.
II giocherà L che domina strettamente R

$I\backslash II$	L
U	8 10
D	7 6

Allora I sceglierà di giocare U che ora domina strettamente D.

Abbiamo allora la coppia (U, L) che è un Nash efficiente.

Si ottiene lo stesso risultato se si considera la tabella

$I\backslash II$	L	R
U	8 10	-1 9
D	7 6	6 5

Esercizio 1.13 Gioco a tre giocatori: I, II, III.
Ciascun giocatore può prendere 1 oppure 2 monete.

strategie di I: $i = 1,\ 2$

strategie di II: $j = 1,\ 2$

strategie di III: $k = 1,\ 2$

I giocatori che prendono lo stesso numero di monete ottengono come payoff 0, il giocatore che prende un numero diverso di monete rispetto agli altri ottiene come payoff il numero delle monete che ha preso.
Cerchiamo l'equilibrio di Nash in strategie miste.

Abbiamo il gioco rappresentabile come:

$I \backslash II$	$j = 1$	$j = 2$
$i = 1$	0 0 0	(0) {2} [0]
$i = 2$	(2) {0} [0]	(0) {0} [1]

k=1

$I \backslash II$	$j = 1$	$j = 2$
$i = 1$	(0) {0} [2]	(1) {0} [0]
$i = 2$	(0) {1} [0]	0 0 0

k=2

Consideriamo gli spazi $X = Y = Z = [0, 1]$
e le funzione $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$
e siano $R_1,\ R_2,\ R_3$ le best reply dei 3 giocatori.

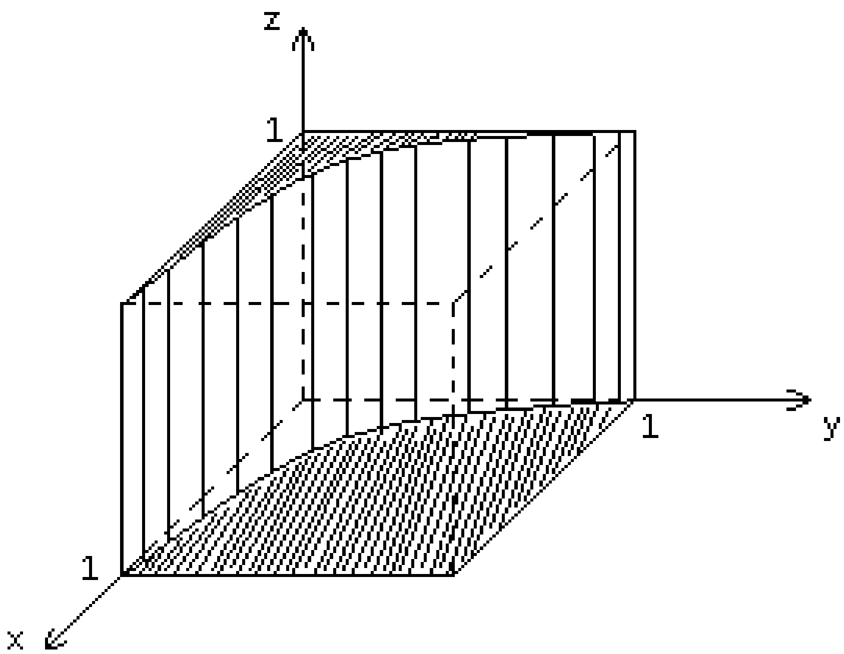
$$\varphi_1(x, y, z) = 1x(1 - y)(1 - z) + 2(1 - x)yz = (2 - (1 + y)(1 + z))\, x + 2yz$$

$$\varphi_2(x, y, z) = 2x(1 - y)z + 1(1 - x)y(1 - z) = (2 - (1 + x)(1 + z))\, y + 2xz$$

$$\varphi_3(x, y, z) = 1(1 - x)(1 - y)z + 2xy(1 - z) = (2 - (1 + x)(1 + y))\, z + 2xy$$

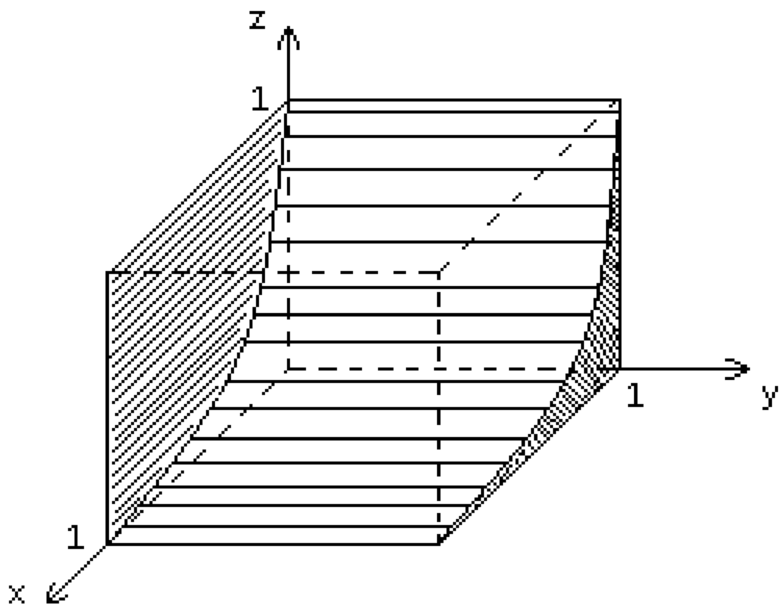
$$R_3(\bar{x}, \bar{y}) = argmax_z\ \varphi_3(\bar{x}, \bar{y}, z) = argmax_z\ \ (2 - (1 + \bar{x})(1 + \bar{y}))\, z + 2\bar{x}\bar{y} =$$

$$= \begin{cases} z = 1 & \text{se } (1 + \bar{x})(1 + \bar{y}) < 2 \\ z \in [0,1] & (1 + \bar{x})(1 + \bar{y}) = 2 \\ z = 0 & (1 + \bar{x})(1 + \bar{y}) > 2 \end{cases}$$



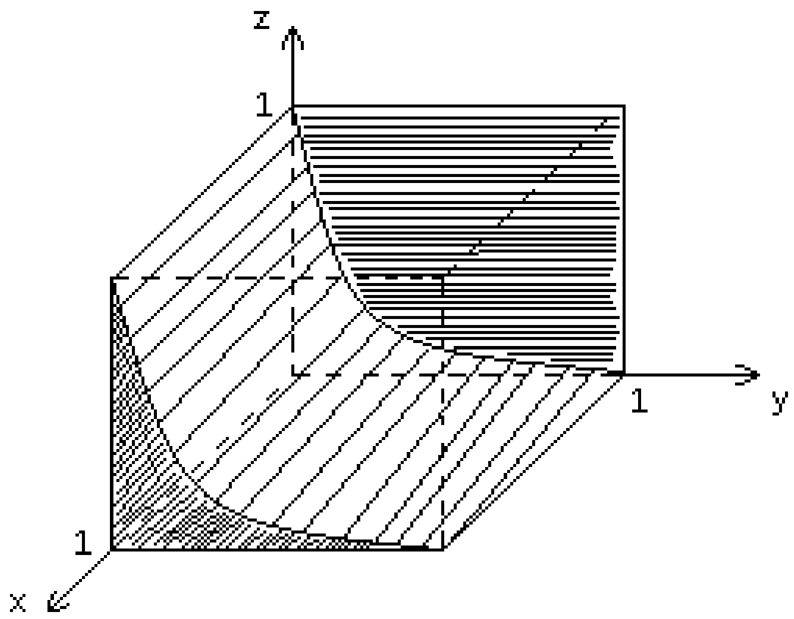
$R_2(\bar{x}, \bar{z}) = argmax_y\ \varphi_2(\bar{x}, y, \bar{z}) = argmax_y\ \left(2 - (1 + \bar{x})(1 + \bar{z})\right) y + 2\bar{x}\bar{z} =$

$$= \begin{cases} y = 1 & \text{se } (1 + \bar{x})(1 + \bar{z}) < 2 \\ y \in [0,1] & (1 + \bar{x})(1 + \bar{z}) = 2 \\ y = 0 & (1 + \bar{x})(1 + \bar{z}) > 2 \end{cases}$$

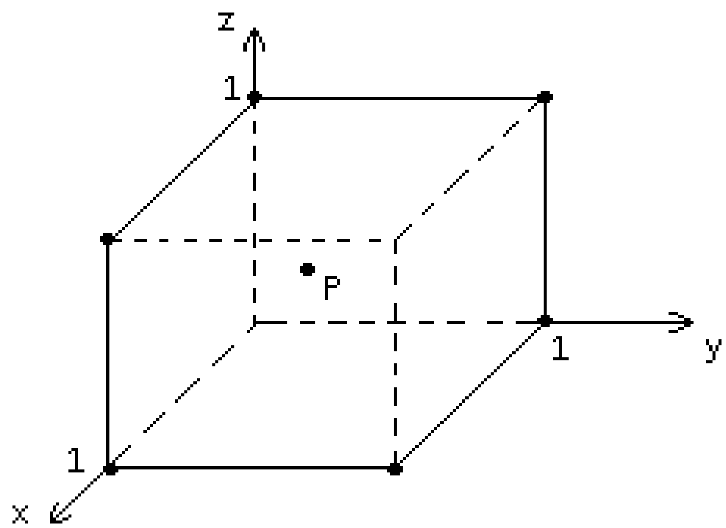


$$R_1(\bar{y},\bar{z}) = argmax_x \ \varphi_1(x,\bar{y},\bar{z}) = argmax_x \ (2-(1+\bar{y})(1+\bar{z}))\,x + 2\bar{y}\bar{z} =$$

$$= \begin{cases} x = 1 & \text{se } (1+\bar{y})(1+\bar{z}) < 2 \\ x \in [0,1] & (1+\bar{y})(1+\bar{z}) = 2 \\ x = 0 & (1+\bar{y})(1+\bar{z}) > 2 \end{cases}$$



L'intersezione delle tre figure è:



Dove i 6 vertici evidenziati sono gli equilibri in strategie pure, mentre il punto centrale P è dato dall'intersezione dei tre tronchi di cilindro:

$$\begin{cases} (1+x)(1+y) = 2 \\ (1+x)(1+z) = 2 \\ (1+y)(1+z) = 2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x = \sqrt{2}-1 \\ y = \sqrt{2}-1 \\ z = \sqrt{2}-1 \end{cases}$$

quindi $P = (\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1)$ rappresenta l'equilibrio di Nash per strategie miste.

Dal momento che le strategie miste contengono le strategie pure è chiaro che si siano ritrovati i 6 vertici che corrispondono alle strategie pure di equilibrio.