1 Vendere una casa...

QUANTO SEGUE E' UN RIASSUNTO E ADATTAMENTO da Binmore

Abbiamo da vendere una casa. E' conoscenza comune che gli interessati all'acquisto della casa sono solo due individui. Il possesso della casa (e le sue conseguenze, ad esempio la sua disponibilità) non ci dà alcuna utilità). L'utilità che ricaviamo dalla vendita è quindi dovuta esclusivamente al guadagno che ne possiamo ottenere. Anzi, noi siamo indifferenti al rischio e quindi la nostra utilità può essere assunta esattamente uguale al guadagno. Un discorso simile vale per i due potenziali acquirenti. I quali acquirenti possono essere di due tipi, che si differenziano solo ed esclusivamente per l'utilità che assegnano al possesso della casa. Un tipo assegna valore pari a 3, e l'altro pari a 4. Poi, entrambi hanno preferenza, rispetto alla somma monetaria che devono sborsare, identiche alle nostre, nel senso che sono entrambi indifferenti al rischio e quindi anche per loro la funzione di utilità, per quanto riguarda i guadagni monetari, può essere assunta essere l'identità. Ognuno dei due potenziali compratori sa che tipo è, cioè sa quanto valuta la casa. Noi tuttavia non sappiamo quale sia il tipo di nessuno di questi due individui, e come noi nessuno di loro sa il tipo dell'altro individuo. Tuttavia, è conoscenza comune (tra tutti e tre, cioè noi e i due potenziali compratori) che la probabilità che un compratore valuti la casa 3 è pari a p. E che "l'estrazione a sorte" dei due acquirenti è effettuata in modo indipendente. Per cui, ad esempio, la probabilità che entrambi i potenziali acquirenti valutino la casa 3 è pari a p^2.

Ci potremmo domandare quanto potremmo aspettarci di guadagnare (cosa che coincide con la nostra utilità attesa, per le ipotesi fatte) se per qualche via potessimo essere a conoscenza del tipo di entrambi i potenziali acquirenti. La risposta è ovvia: se entrambi la valutano 3, la vendiamo ad uno dei due a 3[1]; se almeno uno dei due la valuta 4, allora la possiamo vendere a 4. Morale, il nostro guadagno atteso sarebbe:

$$3p^2 + 4(1 - p^2)$$

A cosa servono i conti appena fatti? Ribadito il fatto che riguardano una situazione immaginaria, hanno tuttavia una funzione importante. Ci danno il "first best". Ovvero, la soluzione ottimale che non potremo in ogni caso migliorare, ma cui potremmo cercare di aspirare, anche nelle nostre condizioni di "menomazione" informativa. Detto altrimenti, se potessimo escogitare un

[1]Diciamo che la vendiamo a $3 - \varepsilon$, ma ε si degnerà di essere, come al solito, piccolo QB

meccanismo il quale ci garantisce la stessa utilità attesa, potremmo essere sicuri di avere ottenuto "il miglior risultato possibile". Sembra plausibile che non si riesca ad ottenere questo risultato, ma la risposta definitiva la vedremo alla fine. Per ora, cercheremo di vedere cosa si possa fare.

Un primo meccanismo di vendita che possiamo immaginare è molto semplice. Mettiamo un cartello in giardino sul quale scriviamo che la casa è in vendita e a quale prezzo la vendiamo. Anzi, per semplificare l'analisi e togliere di mezzo considerazioni non rilevanti per il discorso principale, suppongo che noi possiamo indicare *solo* due prezzi di vendita[2]: o ci scriviamo 3 o ci scriviamo 4.

Usiamo quindi un tipo di "game form" molto degenere, nel senso che non lascia alcuno spazio significativo all'interazione strategica fra i due potenziali acquirenti. In effetti, ognuno ha a disposizione solo due strategie: "compro la casa al prezzo che è indicato" oppure "non la compro a quel prezzo"; una di queste due strategie sarà dominante, e quindi non si pone alcun problema di effettiva interazione strategica (non serve neanche a nulla sapere quale possa esser eil tipo dell'altro, e quindi i belief che un acquirente potenziale può avere su quale sia il tipo dell'altro non servono a nulla).

Il guadagno atteso che otteniamo da queste "game form" è il seguente.

Se metto il cartello con su scritto 3, tutti mi comprano la casa e quindi il mio guadagno certo (e quindi anche atteso...) è pari a 3.

Se metto il cartello con su scritto 4, la vendo se e solo se c'è almeno un acquirente che la valuta 4. Quindi il mio guadagno atteso è pari a $4(1 - p^2)$.

Ricordo che il valore di p è *conoscenza comune* e quindi non ho alcun problema, dato per appunto p, a scegliere tra questi dei due meccanismi quale sia il migliore. Tutto dipende dalla disequazione $3 < 4(1 - p^2)$. Se è soddisfatta, metto il cartello con su 4. Se non è soddisfatta, metto 3 (naturalmente, quando i due membri sono uguali, cioè se $p = 1/2$, è indifferente quale cartello mettere).

Possiamo fare di meglio? La risposta è, generalmente parlando, sì. Come? Ad esempio, utilizzando un meccanismo ben conosciuto: un'asta. Possiamo usare un'asta di tipo inglese, oppure olandese, oppure un'asta in busta chiusa (al "primo prezzo"), oppure un'asta in busta chiusa al "secondo prezzo". E' noto dalla teoria (delle aste, naturalmente...) che questi quattro tipi d'asta

[2] In realtà, dobbiamo dire qualcosa in più, se non vogliamo evocare uno spettro terrificante, ovvero il problema dei "contratti incompleti" (se non stiamo attenti finiamo per occuparci di responsabilità sociale o magari persino di matematica "fuzzy"!). Dando per scontato il fatto che entrambi indichino contemporaneamente la loro volontà di acquisto o meno, dobbiamo precisare cosa facciamo se entrambi esprimono la volontà d'acquisto. La soluzione è ovvia: lanciamo la solita monetina "unbiased"

sono tra loro equivalenti, per quanto riguarda il guadagno atteso (siamo nel caso di un'asta cosiddetta "a valori privati", con potenziali compratori a "tipi indipendenti" ed indifferenti al rischio). E il guadagno atteso lo possiamo calcolare facilmente se usiamo un'asta "al secondo prezzo" (detta anche "asta di Vickrey"[3]). Infatti, è noto che per questo tipo di aste è strategia deblmente dominante offrire esattamente la propria valutazione dell'oggetto. Allora, capiterà con probabilità pari ad $(1-p)^2$ che entrambi valutino la casa 4 e quindi che io ottenga 4; nei rimanenti casi otterrò 3. Quindi, usando l'asta di Vickrey (e quindi anche una qualunque delle aste "classiche" sopra menzionate), il mio guadagno atteso è pari a:

$$3(1-(1-p)^2)+4(1-p)^2$$

che è uguale (facendo i calcoli) a:

$$3+(1-p)^2$$

L'asta di Vickrey mi dà un payoff atteso migliore di quello che posso ottenere con il cartello "vendesi" per $p > 2/5$. Più precisamente, il meccanismo ottimale fra quelli fino ad ora considerati, è:

- il cartello con su scritto 4, se $p \leq 2/5$
- l'asta di Vickrey, se $p \geq 2/5$

Se possiamo essere contenti per avere trovato un metodo col quale poter ottenere di più (almeno nel caso in cui $p > 2/5$), d'altro canto questo stesso fatto rende ancora più acuto il problema se non sia possibile "fare meglio". Infatti, l'asta di Vickrey non raggiunge il "first best", e quindi non possiamo essere sicuri che non vi sia spazio per ulteriori miglioramenti. Abbiamo proprio visto che questo capita!

A nostro maggior sconforto arriva la notizia che si può trovare un'asta "migliore". Si tratta dell'asta di Vickrey "modificata", la quale si differenzia da quella per il fatto che chi fa l'offerta migliore deve pagare la *media* fra le due migliori offerte. Occorre un poco di pazienza, ma si può provare che il guadagno atteso è, con questo nuovo *meccanismo*, pari a:

$$4-p$$

Per ora abbiamo ottenuto che il meccanismo migliore è:

[3] Ricordo che funziona così: l'oggetto all'asta viene aggiudicato al miglio offerente (solito meccanismo aleatorio "equo" se vi è più di un miglior offerente), il quale paga un prezzo uguale alla *seconda* miglior offerta

- il cartello con su scritto 4, se $p \leq 1/4$
- l'asta di Vickrey *modificata*, se $p \geq 1/4$

Va da sé[4] che neanche in questo modo raggiungiamo, in generale, il "first best".

Come possiamo essere certi che non vi sia spazio per qualche ulteriore miglioramento?

La risposta ce la dà proprio il "revelation principle". Non c'è alcun meccanismo *diretto* per il quale *dichiarare la verità* sia equilibrio e che ci permetta di ottenere un payoff migliore di quello che riusciamo ad ottenere con i due meccanismi sopra indicati. Per l'analisi dettagliata di questo fatto (ovverossia, per la *dimostrazione* di quanto appena asserito), rinvio a Binmore ("Fun and Games").

[4] Sennò queste note non sarebbero state scritte