

1 Best reply dynamics

Consideriamo un gioco in forma strategica (X, Y, f, g) .

Una dinamica “naturale”, di tipo *discreto* è la dinamica che prevede che ogni giocatore reagisca alla strategia giocata dall'altro al tempo precedente scegliendo la sua miglior risposta a quella strategia (sperando che questa miglior risposta esista; inoltre, non è detto che la miglior risposta sia unica, per cui dovremmo comunque dire “una miglior risposta”).

Se assumiamo che per ogni (x, y) sia univocamente determinata la miglior risposta di I ad y e di II ad x , la dinamica che si ottiene è la seguente:

$$(x_{n+1} = R_I(y_n), y_{n+1} = R_{II}(x_n))$$

Quindi, se immaginiamo che si parta da un punto iniziale (\hat{x}, \hat{y}) , si ottiene la “traiettoria” (x_n, y_n) descritta ricorsivamente (ovvero, per induzione matematica) nel modo seguente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (x_1, y_1) & = (\hat{x}, \hat{y}) & \text{BASE} \\ (x_{n+1}, y_{n+1}) & = (R_I(y_n), R_{II}(x_n)) \quad \forall n \in \mathbb{N} & \text{PASSO} \end{array} \right.$$

Questa dinamica, ad esempio, converge all'unico equilibrio di Nash nel modello di duopolio di Cournot, nella sua versione più semplice, ovvero quella in cui i payoff sono i seguenti:

$$f(q_1, q_2) = q_1 \cdot p(q_1 + q_2) - c \cdot q_1$$

$$g(q_1, q_2) = q_2 \cdot p(q_1 + q_2) - c \cdot q_2$$

e dove la funzione $q \mapsto p(q)$ è così definita:

$$p(q) = \begin{cases} a - q & \text{se } q \leq a \\ 0 & \text{se } q \geq a \end{cases}$$

Essendo a e c costanti positive assegnate, con $c < a^1$.

Questa dinamica ha delle varianti, tipo quella in cui le “reazioni” dei due giocatori avvengono a tempi alternati (I reagisce alla strategia usata da II , poi al “tempo” successivo il giocatore II reagisce alla strategia usata da I , etc.). Anche questa variante converge all'equilibrio di Nash nel duopolio.

Si noti come questa dinamica corrisponda ad un grado di intelligenza piuttosto basso dei giocatori, nel senso che loro reagiscono solo a ciò che è avvenuto all'ultimo istante precedente e non fanno alcuna analisi della futura dinamica (sono “miopi”).

¹Sennò non c'è gusto...

2 Fictitious play

Una variante interessante consiste nell'utilizzare sempre l'idea di "best reply", ma anziché reagire a quanto è stato fatto nello stadio precedente tenere conto di tutta la "storia passata".

Un modo per fare questo consiste nel considerare la "best reply" ad una media delle azioni scelte precedentemente dall'altro giocatore. E, di queste, la più semplice è la media aritmetica.

Quindi si considera la seguente dinamica:

$$(x_{n+1} = R_I(\frac{y_1 + \dots + y_n}{n}), y_{n+1} = R_{II}(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}))$$

Oltre alle considerazioni già fatte per la "best reply dynamics", relative alla necessità che la miglior risposta esista ed alla convenienza che essa sia unica, in questo caso si aggiunge una ulteriore considerazione. Occorre che abbia senso poter considerare $x_1 + \dots + x_n$ e poter dividere per n (naturalmente la stessa cosa serve per le "y"). Le operazioni indicate (somma e divisione per n) potrebbero non avere alcun senso in X . Un modo per garantire che si possano fare è assumere che X ed Y siano sottoinsiemi convessi di uno spazio vettoriale. Ciò è vero, ad esempio, nel caso del duopolio ($X = Y = [0, \infty[$, e $[0, \infty[$ è un intervallo e pertanto è un sottoinsieme convesso di \mathbb{R}) e nel caso dell'estensione mista di un gioco finito ($\Delta(X)$ e $\Delta(Y)$ sono insiemi convessi).

Nel caso specifico dell'estensione mista di giochi finiti questa dinamica è stato introdotta da Brown (G. W. Brown (1951), *Iterative Solution of Games by Fictitious Play*, pp. 374-376 in: "Activity Analysis of Production and Allocation" (T. C. Koopmans, ed.), New York: Wiley) e Julia Bowman Robinson (può valere la pena vedere uno sketch della sua biografia in: <http://www.agnesscott.edu/lriddle/women/robinson.htm>)

ha provato che questo metodo converge ad un equilibrio nel caso a somma zero (Robinson, J. (1951). *An iterative method of solving a game*, Annals of Mathematics, **54**, 296-301).

Il metodo, contrariamente a quanto uno potrebbe sperare, non è detto che fornisca una successione convergente ad un equilibrio di Nash. Può in effetti avvenire che la successione creata da questo processo iterativo (o sistema dinamico discreto che dir si voglia), non converga affatto, come nell'esempio di Shapley:

| | | | |
|------------------|-----|-----|-----|
| $I \setminus II$ | L | C | R |
| T | 0,0 | 0,1 | 1,0 |
| M | 1,0 | 0,0 | 0,1 |
| B | 0,1 | 1,0 | 0,0 |

La successione creata “oscilla” nell’ordine fra i sei punti: (M, R) , (T, R) , (T, C) , (B, C) , (B, L) ed (M, L) .

3 Dinamica del replicatore

Si comincia con una versione discreta (cioè a tempo discreto). La dinamica avviene in un “giorno” di durata τ (diciamo che un anno è lungo 1 e quindi τ sarà espresso come frazione di un anno; se si trattasse di anni e giorni veri, sarebbe $\tau = 1/365$).

C’è una popolazione composta di una frazione p di H e una frazione $1 - p$ di D .

I payoff, esprimenti la “fitness” sono:

| $I \backslash II$ | D | H |
|-------------------|----------------|----------------|
| D | $U + 1, U + 1$ | $U, U + 2$ |
| H | $U + 2, U$ | $U - 1, U - 1$ |

I payoffs² indicano il numero di “offsprings” attesi “in un anno” da una madre che sia senza nido (U), che abbia un nido tutto per sé ($U + 2$), che divida il nido con un’altra ($U + 1$), che abbia combattuto aspramente per avere un nido ($U = 1$). Assumiamo che la riproduzione sia *asessuata* e che *da una madre D nasca una figlia D* (idem per H).

Allora, per ottenere gli “offsprings” in un “giorno”, le quantità indicate nella matrice vanno moltiplicate per τ .

Assumiamo che la popolazione totale sia mantenuta stabile al livello di N individui (dopo la nascita, competono per il cibo e prima di un nuovo ciclo riproduttivo solo N sopravvivono: evidentemente, assumiamo una situazione in cui le risorse disponibili sono date e fissate).

Vediamo come si evolve una popolazione in cui al tempo t siano presenti una frazione $p = p(t)$ di individui del tipo H e (ovviamente) $1 - p$ individui di tipo D .

Il numero di figli attesi di tipo D , cioè quelli nati da una madre D , sono, per ciascuna di queste madri:

$$\tau f_D(p) = \tau \cdot [pU + (1 - p)(U + 1)] = \tau[U + (1 - p)]$$

²Di fatto, come si vede nel fare i calcoli, la quantità U sarà irrilevante. Cioè, otterremo lo stesso risultato se avessimo la matrice del gioco sotto indicato, che descrive (ironia della sorte) il gioco “chicken”:

| $I \backslash II$ | D | H |
|-------------------|------|--------|
| D | 1, 1 | 0, 2 |
| H | 2, 0 | -1, -1 |

Poiché ci sono $N(1-p)$ madri di tipo D in giro, e queste madri sono vive anche dopo la riproduzione (le morti avvengono solo per effetto della competizione per il cibo), abbiamo che “il giorno dopo”, prima di iniziare a competere per il cibo, vi saranno

$$N(1-p)(1 + \tau f_D(p))$$

individui di tipo D . Analogamente, avremo

$$Np(1 + \tau f_H(p))$$

individui di tipo H . Possiamo notare che si ha:

$$\tau f_H(p) = \tau \cdot [p(U-1) + (1-p)(U+2)] = \tau[U + 2(1-p) - p]$$

Alla “sera” seguente, dopo la competizione per il cibo e prima della riproduzione, la popolazione sarà stata ricondotta al livello di numerosità N . Si noti che, dal punto di vista della competizione per il cibo, non viene fatta alcuna distinzione fra individui D o H , nel senso che la probabilità di non riuscire a procurarsi il cibo è identica per i due tipi (ipotesi non da poco...). Allora, se al tempo t avevamo la frazione $p(t)$ di individui di tipo H , al tempo $t + \tau$ la loro frazione nella popolazione sarà:

$$\begin{aligned} p(t + \tau) &= \frac{Np(t)(1 + \tau f_H(p(t)))}{N \cdot ((1-p(t))(1 + \tau f_D(p(t))) + p(t)(1 + \tau f_H(p(t))))} = \\ &= \frac{Np(t)(1 + \tau f_H(p(t)))}{N \cdot (1 + \tau(1-p(t))f_D(p(t)) + \tau p(t)f_H(p(t)))} = \frac{p(t)(1 + \tau f_H(p(t)))}{1 + \tau \bar{f}(p(t))} = \\ &= p(t) \frac{1 + \tau f_H(p(t))}{1 + \tau \bar{f}(p(t))} \end{aligned}$$

Dove abbiamo posto

$$\bar{f}(p) = (1-p)f_D(p) + pf_H(p)$$

Facendo i calcoli:

$$\frac{p(t + \tau) - p(t)}{\tau} = p(t) \frac{f_H(p(t)) - \bar{f}(p(t))}{1 + \tau \bar{f}(p(t))}$$

E, per $\tau \rightarrow 0$:

$$p'(t) = p(t)(f_H(p(t)) - \bar{f}(p(t)))$$

Questa è l'equazione della dinamica del replicatore. Che si può generalizzare al caso di n tipi diversi di individui, ottenendo:

$$p'_i(t) = p_i(t)(f_i(p(t)) - \bar{f}(p(t)))$$

Dove

$$f_i(p) = \sum_j a_{ij} p_j;$$
$$\bar{f}(p) (= \sum_{i,j} p_i a_{ij} p_j) = \sum_i p_i f_i(p)$$

(la matrice a_{ij} è naturalmente la matrice della fitness).

Tornando al nostro caso, se sostituiamo ad f_H ed a \bar{f} la loro espressione (abbiamo trovato che $f_H(p) = U + 2(1-p) - p$ e $f_D(p) = U + (1-p)$, da cui ci ricaviamo anche $\bar{f}(p)$), otteniamo l'equazione:

$$p' = p(1-p)(1-2p)$$

Possiamo studiare la stabilità (asintotica) di questa equazione. E vediamo che $p = 1/2$ è un equilibrio stabile.

Calcoli analoghi fatti usando una matrice dei payoff che, invece essere quella del gioco "chicken" (vedi nota), sia quella del dilemma del prigioniero, forniscono una dinamica che converge all'unico equilibrio di Nash.