1 Stati di natura e probabilità soggettiva

Abbiamo E insieme degli "esiti finali" (prizes), ed S insieme degli "stati di natura".
Ogni $s \in S$ *"risolve" tutta l'incertezza.*

Esempio 1 Lancio il dado. S è l'insieme di tutte le possibili dinamiche.
Notiamo che le decisioni in condizioni di rischio sono un caso particolare delle decisioni in condizioni di incertezza.

Esempio 2 Taglio la vite ora o la prossima settimana? Ogni s rappresenta una possibile condizione atmosferica.

Nel contesto delle decisioni in condizioni di rischio, è data $p \in P$, con P spazio delle probabilità a supporto finito su E (cioè, una $p \in P$ assegna probabilità strettamente positiva solo ad un numero finito di punti di E; nel caso particolare in cui E sia finito, P rappresenta l'insieme di tutte le probabilità su E).

Nelle decisioni in condizione di incertezza abbiamo $k : S \longrightarrow E$. Per ogni $s \in S$, abbiamo un esito ben determinato. Allora dobbiamo scegliere tra elementi di $K = \{k :\to E\}$
Per capire, ricordiamo che un decisore deve scegliere tra diverse *AZIONI*: abbiamo quindi un insieme delle azioni X, ma il decisore guarda solo le conseguenze!
Consideriamo quindi E insieme degli esiti "finali". Abbiamo allora
$h : X \longrightarrow E$. Ma questo va bene solo in condizioni di certezza!
Se siamo in presenza di "probabilità oggettive", abbiamo $h : X \longrightarrow P$, con $P = \Delta(E)$.
L'azione determina solo una distribuzione di probabilità su E.
E nel caso che interessa a noi, quello delle condizioni di incertezza?
L'esito finale è determinato da h e dallo stato del mondo!
Abbiamo allora $h : X \longrightarrow K = \{k : S \longrightarrow E\}$.

NOTA: Posso considerare questa come la formula "generale" che ingloba le precedenti.

Fissiamo $\bar{x} \in X$. Cosa abbiamo? Dato $\bar{x}$, per ogni $s \in S$, ottengo un ben determinato esito $e \in E$.
Ho cioè una funzione $k_{\bar{x}} : S \longrightarrow E$.

Quindi scegliere tra $\bar{x}$ e $\bar{\bar{x}}$ equivale a scegliere tra le due funzioni

$k_{\bar{x}}$, $k_{\bar{\bar{x}}} : S \longrightarrow E$.
Ecco da dove viene l'idea che gli oggetti di scelta siano le $k \in K$,
con $K = \{k : S \longrightarrow E\}$.

Cerchiamo allora se esistono:

$$\left.\begin{array}{l} - \text{ una distribuzione di probabilità } p \text{ su } S \\ - \text{ una } u : E \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{ tali che:}$$

$k \succ k' \;\Leftrightarrow \sum_{s\in S} u(k(s))p(s) \;>\; \sum_{s\in S} u(k'(s))p(s)$

(Assumiamo S finito. Nella teoria di Savage S è (deve essere!) infinito).
Proviamo a modellizzare, cominciando con un modello sbagliato.

Esempio 3 Data la seguente tabella:

azioni \ stati del mondo	Pioverà	Non Pioverà
Porto Ombrello	non mi bagno	non mi bagno
Non Porto Ombrello	mi bagno	non mi bagno

E' ovvio che preferisco portare l'ombrello, se le mie preferenze sono "normali"!

$E = \{\text{non mi bagno, mi bagno }\} = \{e_1, e_2\}$, con $e_1 \succ e_2$ (si noti che sto usando proprio qui l'assunzione fatta che le mie preferenze siano quelle di una persona "normale", che preferisce non bagnarsi...).
Stati di natura: s_1: pioverà, s_2: non pioverà.
E k_1 "mappa" l'azione "porto l'ombrello" in E.
Quindi

$$k_1(s_1) = e_1 \quad k_1(s_2) = e_1$$

$$k_2(s_1) = e_2 \quad k_2(s_2) = e_1$$

Qualunque sia la mia p su S, avrò $k_1 \succeq k_2$;
ed anzi, a meno che non sia $p(s_1) = 0$, avrò $k_1 \succ k_2$.
Ma c'è qualcosa che non va!
In realtà la descrizione di E è sballata!
Riproviamo con

$$E = \{e_1, e_2, e_3\} \text{ dove}$$

e_1: non mi bagno e non ho ombrello,
e_2: non mi bagno e ho ombrello,
e_3: mi bagno (e non ho ombrello).
E' ovvio che $e_1 \succ e_2 \succ e_3$

azioni \ stati del mondo	Pioverà	Non Pioverà
Porto Ombrello	non mi bagno e ho ombrello	non mi bagno e ho ombrello
Non Porto Ombrello	mi bagno	non mi bagno e non ho ombrello

$$k_1(s_1) = e_2 \quad k_1(s_2) = e_2$$
$$k_2(s_1) = e_3 \quad k_2(s_2) = e_1$$

Non è più "banale": dipende da u e da p. Si noti: dipende anche da p, la probabilità che attribuisco ai vari stati del mondo.

Vi è un'altra osservazione da fare:
l'*utilità* che attacchiamo ad $x \in X$ è *INDIPENDENTE* dallo stato di natura nel quale si verifica.
Per la teoria di Savage, rinvio ai testi standard. Qui mi limito ricordare la proprietà più importante richiesta da Savage.

Teorema 1 {*SURE THING PRINCIPLE*}
Siano $k, \hat{k} : S \longrightarrow E$.
supponiamo che $k|_T = \hat{k}|_T$ *su* $T \subseteq S$ *e che* $k \succ \hat{k}$.
Siano ora $k', \hat{k}'$ *tali che:* $\begin{cases} k'|_{S \setminus T} = k|_{S \setminus T} \\ \hat{k}'|_{S \setminus T} = \hat{k}|_{S \setminus T} \end{cases}$
e sia $k'|_T = \hat{k}'|_T$.

Allora $k' \succ \hat{k}'$

(Insomma, "come" coincidono su T non importa!)

Vediamo questo con tabella (qui $T = \{s_{r+1}, \dots, s_m\}$):

	stati del mondo	s_1	$\dots$	s_r	s_{r+1}	$\dots$	s_m
azioni	mappa						
x	k	a	$\dots$	z	o	$\dots$	o
$\hat{x}$	$\hat{k}$	$\hat{a}$	$\dots$	$\hat{z}$	o	$\dots$	o
x'	k'	a	$\dots$	z	x	$\dots$	x
$\hat{x}'$	$\hat{k}'$	$\hat{a}$	$\dots$	$\hat{z}$	x	$\dots$	x

C'è anche una teoria dovuta ad Anscombe ed Aumann.
Il punto essenziale è che invece di considerare $K = \{k : S \longrightarrow E\}$,
come fa Savage, Frank J. Anscombe e Robert Aumann considerano $K_\Delta = \{k : S \longrightarrow \Delta(E)\}$.
Chi fosse interessato può consultare ad esempio Myerson.