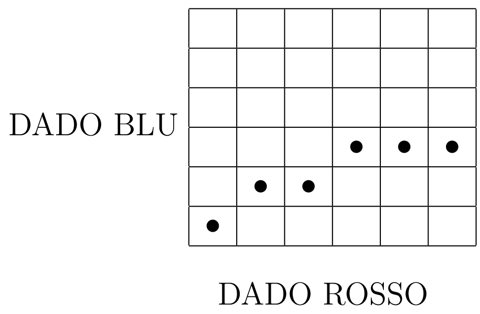
1 Dadi rossi e dadi blu

In tutti gli esempi che seguono ci occupiamo del lancio di due dadi, uno rosso ed uno blu. Abbiamo un decisore che vede l'esito del dado rosso (e solo di quello) ed un altro che vede l'esito del dado blu (e solo quello). E ciò si assume sia conoscenza comune fra i due decisori.

E' anche sempre individuato un sottoinsieme E di $\{1,\dots,6\} \times \{1,\dots,6\}$, che nei disegni viene evidenziato con i pallini neri. Anche chi sia E si assume sia conoscenza comune fra i due decisori.

Esempio 1 L'evento E è individuato dai pallini neri.



Lo stato vero di natura sia $(3, 2)$. La prior di entrambi, cioè la probabilità che entrambi assegnano al fatto che lo stato vero sia in E, è $6/36 = 1/6$.
Il decisore I osserva il dado rosso e aggiorna la sua prior a $1/6$ (si noti che non cambia, d'altronde è ovvio che qualunque informazione lui avesse ricevuto non avrebbe avuto alcuna utilità).
Il decisore II aggiorna a $1/3$.
Le posterior vengono rese conoscenza comune.
Allora I, sapendo la posterior di II, capisce che ciò che ha osservato II non può essere altro che 2 e quindi deduce che lo stato vero di natura è $(3, 2)$ e quindi assegna probabilità 1 ad E.
II invece non effettua nessun aggiornamento, rimanendo con la stessa posterior $1/3$ che aveva prima.
Le nuove posterior vengono rese conoscenza comune.
I non modifica la sua posterior, che resta 1.
Invece II capisce che lo stato vero di natura deve essere uno fra $(2, 2)$ e $(3, 2)$, entrambi comunque appartenenti ad E, quindi aggiorna la sua posterior a 1.
Le nuove posterior vengono rese conoscenza comune.
Nessuno ha ragione per modificare la sua posterior. Quindi restano entrambe

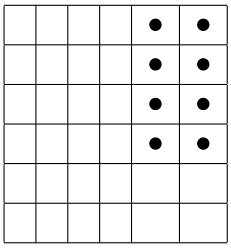
uguali ad 1. Si noti che I sa chi è il vero stato di natura, mentre II non lo sa.

Esercizio 1 Vedere cosa avviene se lo stato vero di natura à $(1, 1)$.

Altro esempio:

Esempio 2 L'evento è:

DADO BLU

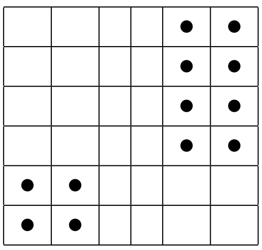


DADO ROSSO

La prior di entrambi è 8/36.
Lo stato vero di natura sia $(5, 3)$.
Il decisore I osserva il dado rosso e aggiorna la sua prior a 2/3. Il decisore II aggiorna a 1/3.
Le posterior vengono rese CK.
I, sapendo la posterior di II, capisce che lo stato vero di natura non può essere né $(5, 1)$, né $(5, 2)$, perché altrimenti la posterior di II sarebbe stata 0. Allora I rivede la sua posterior e assegna (correttamente) probabilità 1 all'evento dato dagli 8 pallini.
Discorso analogo per II.

Esempio 3

DADO BLU



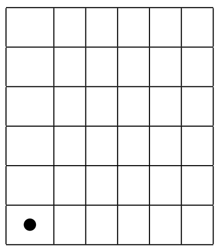
DADO ROSSO

La prior di entrambi è 12/36.
Supponiamo che lo stato di natura vero sia di nuovo $(5, 3)$. Allora la posterior di I è di nuovo 2/3, mentre la posterior di II è 1/3, come prima.
Vengono rese CK
Naturalmente, questa volta il fatto che la posterior di II sia 1/3 non dice nulla a I, che non ha ragione di rivedere la sua posterior.
Invece II sa che dal dado blu è uscito 3 e quindi capisce che quindi dal dado rosso deve essere uscito 4 oppure 5 (sennò la posterior di I non potrebbe essere 2/3). E quindi la sua posterior diventa 1.
Le nuove posterior vengono rese CK.
Ora I, sapendo che II ha modificato la sua posterior e che questa è diventata 1, ne deduce che II non può avere osservato altro che un numero fra $3, 4, 5, 6$.
E quindi anche lui assegna probabilità 1 al fatto che lo stato vero di natura stia in E.
Notare che, alla fine, I sa che lo stato vero di natura è uno fra $(5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)$, mentre II sa che è uno fra $(5, 3)$ e $(6, 3)$

Ancora un altro paio di esempi:

Esempio 4

DADO BLU

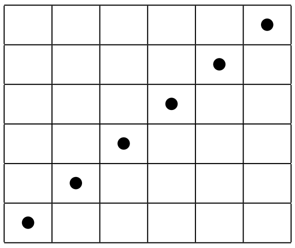


DADO ROSSO

La prior di entrambi è 1/36.
Supponiamo che lo stato di natura vero sia $(1, 1)$. Allora la posterior di I è 1/6, mentre la posterior di II è 1/6 anch'essa.
Nel momento in cui le posterior vengono rese conoscenza comune, deducono entrambi che lo stato di natura vero è $(1, 1)$ e quindi attribuiscono probabilità 1 all'evento E

Esempio 5

DADO BLU



DADO ROSSO

La prior di entrambi è $1/6$. Supponiamo di nuovo che lo stato vero di natura sia $(1, 1)$.
Naturalmente, questa volta l'osservazione del loro dado non dice nulla ai due decisori, che quindi restano con le loro posterior inalterate, identiche alle prior. Si noti che se potessero mettere in comune le informazioni parziali che hanno, dedurrebbero che la probabilità dell'evento è 1 (nello stato di natura dato)