# 1 Modello di contrattazione di Nash

Consideriamo un gioco in forma strategica: $(X, Y, f, g)$, dove $X$ è l'insieme delle strategie del primo giocatore e $Y$ è l'insieme delle strategie del secondo.
Per semplicità supponiamo che $X$ ed $Y$ siano insiemi finiti.

Indichiamo con $\Delta(X)$ l'insieme di tutte le distribuzioni di probabilità su $X$ e analogamente con $\Delta(Y)$ e $\Delta(X \times Y)$ rispettivamente l'insieme di tutte le distribuzioni di probabilità su $Y$ e su $X \times Y$.

**Definizione 1** *Una strategia correlata è una distribuzione di probabilità su* $X \times Y$*.*

Ciò significa che i giocatori possono accordarsi su una distribuzione di probabilità qualunque su $X \times Y$, anzichè scegliere ciascuno una distribuzione di probabilità sul suo spazio di strategie e considerare la distribuzione di probabilità su $X \times Y$ che si ottiene dall'assunto che le due distribuzioni su $X$ e $Y$ siano indipendenti.

**Osservazione 1** *Scegliere una distribuzione di probabilità su $X$ per il primo giocatore e una distribuzione di probabilità su $Y$ per il secondo giocatore corrisponde alla scelta di due variabili aleatorie indipendenti. Una strategia correlata è invece una distribuzione di probabilità su $X \times Y$ che può avere marginali non indipendenti.*

Se supponiamo che $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ ed $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, allora una strategia correlata $\mu$ è individuata da una matrice $\mu_{ij}$, dove $\mu_{ij}$ è la probabilità assegnata da $\mu$ alla coppia di strategie pure $(x_i, y_j)$.
Il *payoff atteso* da parte del giocatore $I$, se viene "giocata" la strategia $\mu$, è:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} f(x_i, y_j)$$

Questo è il valore atteso di $f$ rispetto alla distribuzione di probabilità $\mu$ su $X \times Y$. Possiamo indicarlo con: $E_\mu(f)$. Analogamente per $II$ indichiamo il valore atteso di $g$ con $E_\mu(g)$.
Data la strategia $\mu$, otteniamo quindi $(E_\mu(f), E_\mu(g))$: si tratta di una coppia di numeri reali che quindi possiamo rappresentare nel piano cartesiano.
Abbiamo quindi una funzione $\mathcal{E} : \Delta(X \times Y) \longrightarrow \mathbf{R}^2$.
Ci interessa l'*immagine* di $\mathcal{E}$, cioè $\mathcal{E}(X \times Y)$. Essa è l'involucro convesso dell'insieme

$$\{(f(x_i, y_j), g(x_i, y_j)) : i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n\}$$

**Esempio 1** *(dilemma del prigioniero) Consideriamo il gioco:*

| $I \backslash II$ | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $(2,2)$ | $(0,3)$ |
| $B$ | $(3,0)$ | $(1,1)$ |

*L'insieme $\mathcal{E}(X \times Y)$ è rappresentato in figura 1.*

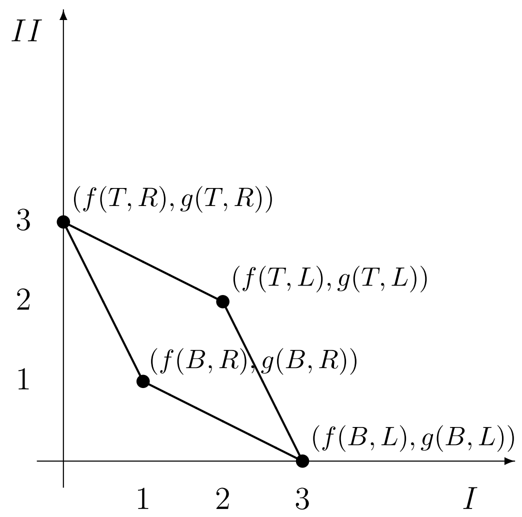


Figura 1: Un esempio di insieme di contrattazione

Si verifica che $\mathcal{E}(X \times Y)$ è un sottoinsieme chiuso, convesso e limitato di $\mathbb{R}^2$ (ricordo che un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato).

Possiamo pensare che i giocatori si accordino per giocare una strategia correlata $\mu$ t.c. $\mathcal{E}(\mu)$ sia efficiente. Non è però altrettanto agevole immaginare su quale specifica $\mu$ si possano accordare: sarebbe interessante poter individuare un criterio di scelta che ci metta in grado di fare previsioni (o prescrizioni).

Prima di affrontare questo compito, sarà opportuno fare una pausa di riflessione, per introdurre qualche ulteriore elemento utile ai fini del nostro problema. Se è vero che l'insieme $\mathcal{E}(X \times Y)$ rappresenta tutte le coppie dei valori dei payoff che i due giocatori possono ottenere sottoscrivendo accordi vincolanti per giocare una strategia correlata, ciò non di meno non è

ragionevole immaginare che *tutti* gli accordi possano venire prevedibilmente sottoscritti. Ad esempio, nel dilemma del prigioniero un contratto che preveda di giocare la coppia di strategie $(T, R)$ (con probabilità 1, s'intende) sarà difficilmente sottoscritto dal giocatore $I$, visto che lui, giocando $B$, è in grado di *garantirsi comunque* un payoff almeno pari ad 1.
Più in generale, possiamo immaginare che siano un importante punto di riferimento per i due giocatori i loro rispettivi valori di *max min* (si noti: *non* stiamo parlando del *min max* che viene utilizzato nel contesto dei giochi ripetuti).
Ricordiamo che, se abbiamo un gioco finito $(X, Y, f, g)$, è naturale considerare il valore di maxmin valutato sulla estensione mista del gioco. Pertanto, porremo

$$v_I = max_{p\in\Delta(X)} min_{q\in\Delta(Y)} \hat{f}(p, q) \text{ e } v_{II} = max_{q\in\Delta(Y)} min_{p\in\Delta(X)} \hat{g}(p, q)$$

avendo posto

$$\hat{f}(p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j f(x_i, y_j)$$

e definendo analogamente $\hat{g}$.
Può sembrare ragionevole restringere le scelte ai soli elementi $(u_1, u_2) \in \mathcal{E}(\Delta(X \times Y))$ che soddisfano le condizioni $u_1 \geq v_I$ e $u_2 \geq v_{II}$.
Tutto quanto abbiamo visto finora può essere considerato come una premessa alla formalizzazione di cosa sia un problema di contrattazione (almeno dal punto di vista che è stato a suo tempo considerato da Nash).

**Definizione 2** *Diremo che un problema di contrattazione è una coppia* $(S, d)$*, dove:*

- $S \subseteq \mathbb{R}^2$*, chiuso, convesso e non vuoto*
- $d \in \mathbb{R}^2$

L'interpretazione dovrebbe essere evidente: $S$ rappresenta l'insieme di tutte le coppie di valori di utilità ai quali i due giocatori possono pervenire, e $d = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ rappresenta il "punto di disaccordo", cioè il valore che i giocatori possono ottenere in caso di mancato raggiungimento di un accordo.

**Osservazione 2** *Abbiamo identificato un problema di contrattazione con la coppia* $(S, d)$*. Ricordiamo anche che siamo arrivati a questa formulazione partendo da un gioco in forma strategica e cercando di vedere dove ci potesse* *condurre la possibilità di sottoscrivere accordi vincolanti. In particolare, abbiamo "suggerito" implicitamente di identificare $S$ con $\mathcal{E}(\Delta(X \times Y))$ e $d$ con la coppia $(v_I, v_{II})$. Si noti tuttavia che:*

1. *quello sopra delineato* non è l'unico modo possibile *per trasformare un gioco strategico in un problema di contrattazione. In particolare, si possono impiegare altri approcci per identificare il punto di disaccordo.*

2. *l'approccio seguito può essere criticato per essere troppo rigidamente "welfarista". Con il modello che consideriamo, assumiamo che l'insieme $S$ (con la sua interpretazione canonica, quale insieme delle coppie di valori di utilità sui quali i giocatori contrattano) rappresenti, assieme a $d$,* tutte le informazioni rilevanti. *Ciò può non essere vero. Solo per fare un esempio, aspetti procedurali possono essere importanti e naturalmente in questo approccio non possono emergere in modo esplicito (si noti però che potrebbero essere implicitamente incorporati nel tipo di soluzione che si andrà a scegliere).*

Formalizziamo il problema di contrattazione.
Indichiamo con $\mathcal{B}$ l'insieme dei problemi di contrattazione dei quali ci occupiamo. Gli elementi di $\mathcal{B}$ sono coppie $(S, d)$, dove:

1. $S$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, chiuso e convesso

2. $d = (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in \mathbb{R}^2$

3. $S \cap \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : u_1 \geq \bar{u}_1 \text{ e } u_2 \geq \bar{u}_2\}$ è non vuoto e limitato

Se in $S$ c'è un elemento $(u_1, u_2)$ con $u_1 > \bar{u}_1$ e $u_2 > \bar{u}_2$, allora il problema di contrattazione $(S, d)$ viene detto *essenziale*.
Per *soluzione* del problema di contrattazione (relativamente alla classe $\mathcal{B}$ sopra individuata) intendiamo una applicazione $\Phi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^2$. L'idea è che ad ogni $(S, d)$ siamo in grado di associare (univocamente!) una coppia $\Phi(S, d) = (\Phi_1(S, d), \Phi_2(S, d))$ che rappresenti, in termini interpretativi, i valori di utilità assegnati rispettivamente ai due giocatori.
Come definire questa $\Phi$?
L'approccio seguito da Nash non è stato quello di definire "a priori" $\Phi$. Ma di imporre condizioni "ragionevoli" che ogni soluzione $\Phi$ dovrebbe soddisfare. E poi di provare che c'è una ed una sola $\Phi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^2$ che soddisfa tali condizioni. Queste condizioni sono le seguenti:

1. **Efficienza forte**: $\Phi(S, d) \in S$ ed è un ottimo paretiano forte per $S$

2. **Razionalità individuale**: $\Phi_1(S, d) \geq \bar{u}_1$ e $\Phi_2(S, d) \geq \bar{u}_2$

3. **Co-varianza rispetto a cambiamenti di scala**: Per ogni $\lambda_1, \lambda_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, siano:

   $S' = \{(\lambda_1 u_1 + \gamma_1, \lambda_2 u_2 + \gamma_2) : (u_1, u_2) \in S\}$ e $d' = (\lambda_1 \bar{u}_1 + \gamma_1, \lambda_2 \bar{u}_2 + \gamma_2)$

   Allora
   $$\Phi(S', d') = (\lambda_1 \Phi_1(S, d) + \gamma_1, \lambda_2 \Phi_2(S, d) + \gamma_2)$$

4. **Indipendenza dalle alternative irrilevanti**: Sia dato $(S, d)$ e sia $G \subseteq S$, $G$ chiuso e convesso, t.c. $\Phi(S, d) \in G$. Allora $\Phi(S, d) = \Phi(G, d)$

5. **Simmetria**: Se $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$ e se $(u_1, u_2) \in S \Leftrightarrow (u_2, u_1) \in S$, allora $\Phi_1(S, d) = \Phi_2(S, d)$

Si può allora enunciare il seguente:

**Teorema 1** *C'è una ed una sola soluzione $\Phi$, definita su $\mathcal{B}$, che soddisfa le condizioni 1), ..., 5). Inoltre, se $(S, d)$ è essenziale, si ha che:*

$$\Phi(S, d) = \mathit{argmax}\ (u_1 - \bar{u}_1)(u_2 - \bar{u}_2)\ \mathit{con}\ (u_1, u_2) \in S, u_1 \geq \bar{u}_1, u_2 \geq \bar{u}_2$$

# 2 Commenti al modello di contrattazione

Dunque il teorema di Nash è in grado di mettere d'accordo chiunque si trovi in una situazione come quella di sopra ed accetti le sue condizioni per un' "equa" spartizione.

> Il primo assioma vuol mettere in luce un criterio di efficienza: non ha senso accontentarsi di un risultato, se entrambi i giocatori possono fare meglio. Dunque, anche ammettendo che i giocatori possano distruggere utilità, questo non può accadere all'equilibrio.
>
> Il secondo assioma dice in sostanza che nessuno accetterà mai un contratto che gli offre una utilità inferiore a quella che potrebbe ottenere senza cooperare.
>
> Il terzo assioma riguarda l'invarianza rispetto a trasformazioni di utilità. In pratica dice che se cambiamo unità di misura all'utilità dei giocatori (i fattori $\lambda_1$ e $\lambda_2$) e aggiungiamo certe quantità iniziali (partendo dalle utilità $\gamma_1$ e $\gamma_2$, per esempio, invece che da 0 e 0), il risultato cambia tenendo conto esattamente dei fattori precedenti. Insomma non cambia, in sostanza, il risultato se si effettuano i cambiamenti ammessi nella teoria dell'utilità di von Neumann e Morgenstern.

Il quarto è chiamato indipendenza dalle alternative irrilevanti: se aggiungere a $C$, che è l'insieme delle utilità che i giocatori si possono garantire nella contrattazione, altri elementi, che portano a costruire un insieme più grande $C'$, porta come risultato a una situazione che già era in C, allora quest'ultima è anche la soluzione per il gioco C. (Notare che il punto di disaccordo è lo stesso in entrambi i giochi). In altre parole, quello che abbiamo aggiunto a $C$ non sono che alternative irrilevanti, appunto.

Il quinto, detto assioma di simmetria, è molto chiaro: significa che in un gioco simmetrico il risultato deve essere simmetrico. Se i giocatori sono indistinguibili dal punto di vista delle loro utilità e dal punto di partenza, il risultato deve essere lo stesso per ambedue.

Il modello di contrattazione di Nash è certamente molto interessante. Allo stesso tempo, non è certo esente da critiche. E qui non parliamo solo delle osservazioni che si possono fare sugli assiomi, ma puntiamo l'attenzione sulle assunzioni "nascoste", che non sono di poco conto e che per di più rischiano di passare inosservate.
Vediamo ora alcuni problemi che possono rappresentare una critica all'approccio assiomatico di Nash:

- Come si sceglie il punto d? Non è facile fare una scelta se il gioco dato non è cooperativo. In realtà ci sono vari approcci: il max-min, un equilibrio di Nash,...
- analogamente, l'insieme $S$ è individuato con certezza?
- ogni $S$ con le caratteristiche date (convesso, etc.) è un "feasibility set" per un qualche problema di contrattazione? O ve ne sono alcuni che non si posssono ottenere in questo modo?
- altre informazioni, oltre a quelle previste (e cioè $(S, d)$), rappresentate in termini di valori di utilità, non hanno alcun rilievo in un problema di contrattazione? Non saremmo disposti a modificare le nostre opinioni se avessimo informazioni supplementari?
- per quale motivo $\Phi$ deve essere un unico punto? Ad esempio, un gioco strategico non ha in genere un unico equilibrio di Nash
- un'altra obiezione è più generale ed è una obiezione di fondo all'approccio assiomatico. Perchè mai determinare una soluzione su una classe di giochi quando si ha a che fare con un gioco concreto? Dietro a

questa impostazione c'è l'idea di una validità normativa. Ma anche da questo punto di vista la classe dei giochi che posso aspettarmi di giocare è assimilabile all'insieme dei problemi di contrattazione su cui si ha l'assiomatizzazione di Nash?

- In alcuni casi la soluzione dettata dal modello non è equa. Per esempio, se la spartizione della somma avviene tra due persone (I e II) la cui funzione di utilità assume i seguenti valori:

| Moneta di I | Moneta di II | Utilità di I | Utilità di II | Prodotto |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 100 | 0.00 | 1.00 | 0.00 |
| 25 | 75 | 0.25 | 0.98 | 0.245 |
| 50 | 50 | 0.50 | 0.90 | 0.450 |
| 75 | 25 | 0.75 | 0.73 | 0.548 |
| 100 | 0 | 1.00 | 0.00 | 0.00 |

  la soluzione di Nash offre 75 a I e 25 a II. Cio è eticamente giustificabile? La funzione di utilità dichiarata da I è tipicamente la funzione dichiarabile da un "ricco", mentre l'utilità dichiarata da II è più probabile per un "povero". C'è dunque una ingiustizia?

  Probabilmente siamo portati a pensare che sarebbe meglio dare di più al povero.

  L'ingiustizia sembra derivare da come si tiene conto, nel modello di contrattazione, delle funzioni di utilità: il più povero assegna grande valore anche a piccoli incrementi di ricchezza e, visto che si guarda agli incrementi delle funzioni di utilità, viene penalizzato.

- altre critiche significative sono state fatte, questa volta rimanendo dentro il perimetro dell'approccio di Nash, all'assioma dell'indipendenza dalle alternative irrilevanti. In effetti può non sembrare sensato che di fronte a nuove alternative la soluzione non debba mai cambiare. Nuove alternative possono cambiare la forza contrattuale di chi da queste viene privilegiato.

  Osserviamo l'esempio di figura 2 (il disagreement point è l'origine degli assi in entrambi i casi). Non sembra naturale che la soluzione dei due insiemi di contrattazione sia la stessa, in quanto le maggiori alternative presenti nel secondo modello potrebbero naturalmente privilegiare il secondo giocatore.

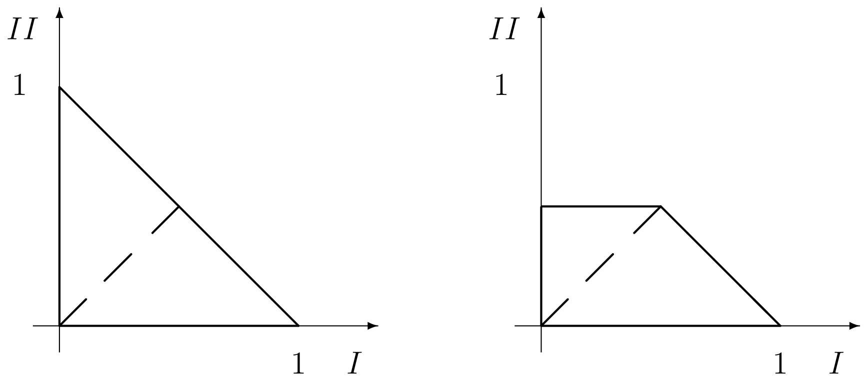


Figura 2: Due problemi di contrattazione