

1 TU games

I giochi a utilità trasferibile, detti anche giochi (cooperativi) a pagamenti laterali (side-payments games), sono la classe più semplice di giochi cooperativi rappresentabili in forma caratteristica. Come evidenziato nel breve paragrafo precedente, sono un caso molto particolare di NTU-games, i quali NTU-games costituiscono la generalizzazione al caso di n giocatori degli insiemi F visti per i giochi di contrattazione.

Torniamo quindi ai TU-games, per dare la definizione formale, innanzi tutto.

Definizione 1 *Sia N un insieme finito. E sia $v : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ una applicazione t.c. $v(\emptyset) = 0$. La coppia (N, v) si dice “gioco a pagamenti laterali”.*

L’interpretazione più semplice ed immediata è quella di pensare che (N è ovviamente l’insieme dei giocatori) ogni gruppo di giocatori S sia in grado di garantirsi (di ottenere) una somma di denaro, che indichiamo con $v(S)$. Naturalmente supponiamo che $S \subseteq N$. Ed è abbastanza naturale pensare che se $S = \emptyset$ (cioè non contiene elementi!) si possa assumere che v sia uguale a zero. I sottoinsiemi S di N vengono detti “coalizioni”. Vediamo un paio di esempi.

Esempio 1.1 (Gioco di maggioranza) *Abbiamo $N = \{1, 2, 3\}$ e $v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$, mentre $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 1$. L’idea è che, per far passare una decisione (che vale 1 per il gruppo che riesce a farla passare) sia necessaria la maggioranza di N . Ovviamente questo esempio può essere generalizzato, sia considerando un insieme N qualsiasi, sia fissando in modo opportuno la quota necessaria per far passare la decisione (es. maggioranza semplice, oppure una qualche forma di maggioranza qualificata).*

Esempio 1.2 (Gioco dei guanti) *Abbiamo un insieme N di giocatori, che è partizionato in due sottoinsiemi L (i giocatori che possiedono esattamente un guanto sinistro ciascuno) ed R (i giocatori che possiedono esattamente un guanto destro ciascuno). Ovviamente $N = L \cup R$ e $L \cap R = \emptyset$. Data una coalizione S , $v(S)$ è uguale al numero di paia di guanti che gli elementi di S riescono a formare. Ad esempio se in S ci sono 3 elementi di L e 5 elementi di R , si ha $v(S) = 3$, perchè riescono a formare 3 paia di guanti (e ne avanzano due destri).*

Una importante classe di TU-games è costituita dai giochi superadditivi.

Definizione 2 Sia $G = (N, v)$ un gioco a pagamenti laterali. G si dice superadditivo se:

$$\forall S, T \subseteq N \text{ t.c. } S \cap T = \emptyset : v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \quad (1)$$

L'interpretazione della condizione (1) è ovvia: traduce l'idea che "l'unione fa la forza". E' verificata spesso (es. sia il gioco di maggioranza che il gioco dei guanti soddisfano (1), come si può verificare). Naturalmente non è scontata in ogni situazione: può succedere che S e T siano coalizioni portatrici di interessi tra loro conflittuali e che quindi la coalizione $S \cup T$ venga "penalizzata" da contrasti interni o che comunque abbia dei risultati inferiori a quelli che S e T potrebbero avere separatamente.

Una condizione meno restrittiva della superadditività consiste nel richiedere che il gioco sia coesivo.

Definizione 3 Sia $G = (N, v)$ un gioco a pagamenti laterali. G si dice coesivo se:

$$\text{per ogni } \{S_1, S_2, \dots, S_k\}, \text{ partizione di } N, \text{ si ha } v(N) \geq \sum_{i=1}^k v(S_i) \quad (2)$$

Esercizio 1.1 Sia dato $G = (N, v)$; provare che se soddisfa (1) allora soddisfa anche (2). Fornire un esempio di gioco coesivo che non sia superadditivo.

Come fa intuire l'esercizio (1.1) la condizione di essere coesivo è meno restrittiva della superadditività. Comunque, se un gioco è coesivo è ugualmente conveniente per i giocatori formare la "grande coalizione" N .

A volte ci si imbatte in problemi in cui il dato che si ha, o che è più naturale considerare, rappresenta dei *costi*, anziché dei guadagni. Vale a dire: ad ogni coalizione S si può assegnare un numero $c(S)$ la cui interpretazione è quella di un costo associato alla coalizione S . Se si ha un gioco di costi, lo si può convertire in un gioco "normale", ad esempio definendo $v(S) = -c(S)$. Oppure si può lavorare direttamente nell'ambito dei giochi di costo¹. Ovviamente le disuguaglianze si "invertiranno". Ad esempio, la condizione di

¹Ed è anche meglio, perchè la conversione non è scontata. Perchè uno può "convertire" il gioco di costi nel gioco "dei risparmi", definendo $v(S) = \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S)$. Ed è chiaro che, a parità di criterio applicato, si otterranno risultati diversi a seconda della conversione scelta.

superadditività avrà come naturale sostituta la subadditività.

Il problema fondamentale, dato un gioco TU, è come “spartire i guadagni” tra i giocatori. Ovverossia, come spartire i costi per un gioco dei costi. Come vedremo, non c’è una indicazione univoca, o una regola “incontestabile”. Vale anche per i giochi cooperativi quanto si può dire per i giochi non cooperativi. La teoria non dice quale “deve essere” la soluzione, bensì analizza le proprietà delle diverse possibili soluzioni, mettendo in evidenza sia gli aspetti “positivi” che quelli “negativi”. Come di consueto, per esprimere più agevolmente e con maggiore precisione i concetti che ci interessano, avremo bisogno di un linguaggio appropriato. Introduciamo quindi la terminologia essenziale. Ci servirà, dato un insieme E finito, avere un simbolo per indicare il numero dei suoi elementi: useremo a tale fine il simbolo $|E|$. Quindi $|N|$ indica il numero complessivo dei giocatori. Per maggiore concisione, supporremo che sia $|N| = n$.

Definizione 4 Sia $G = (N, v)$ un TU-game. Un elemento $x \in \mathbb{R}^n$ si dice *allocazione* (per G). Se $\sum_{i=1}^n x_i = v(N)$ l’allocazione x si dice *pre-imputazione*. Una pre-imputazione che soddisfa anche la condizione $x_i \geq v(\{i\}) \quad \forall i \in N$ è detta *imputazione*.

L’interpretazione di una pre-imputazione è ovvia: si tratta di una ripartizione di $v(N)$ tra i giocatori. Ovviamente, il concetto di pre-imputazione è particolarmente interessante per i giochi coesivi (e quindi anche per quelli superadditivi): è per questa classe di giochi che è ragionevole immaginare che si formi la grande coalizione N e che quindi una “soluzione” debba consistere nello scegliere una (o più di una) possibile ripartizione di $v(N)$. Si noti che la condizione $\sum_{i=1}^n x_i = v(N)$ può essere “letta” come esprime due condizioni contemporaneamente: $\sum_{i=1}^n x_i \leq v(N)$ (che per i giochi coesivi rappresenta una condizione di fattibilità) e $\sum_{i=1}^n x_i \geq v(N)$ (che rappresenta invece una condizione di efficienza). Quest’ultima condizione viene anche indicata come condizione di “razionalità collettiva”. Da questo punto di vista, la condizione $x_i \geq v(\{i\})$ è interpretabile come condizione di “razionalità individuale” per il giocatore i .

Esercizio 1.2 Trovare le imputazioni del gioco di maggioranza.

Esercizio 1.3 Provare che se (N, v) è coesivo, allora il gioco ha imputazioni.

Indicheremo con $I(v)$ l’insieme delle imputazioni del gioco (N, v) . Come lascia intuire l’esercizio precedente, può essere che $I(v) = \emptyset$.

Esercizio 1.4 Indicare un gioco (N, v) per il quale si abbia $I(v) = \emptyset$.

Abbiamo introdotto, a livello di interpretazione, l'idea di razionalità collettiva e di razionalità individuale. Non occorre molta fantasia per pensare anche a condizioni di razionalità "intermedia", che sono date evidentemente da condizioni del tipo: $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$, dove S è una generica "coalizione". Questa idea elementare ci porta immediatamente ad uno dei concetti chiave di "soluzione" per un gioco TU: è l'idea di nucleo.

Definizione 5 Sia (N, v) un gioco TU. Indichiamo con $C(v)$ il nucleo del gioco, dove: $C(v) = \{x \in I(v) : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \forall S \subseteq N, \sum_{i \in N} x_i = v(N)\}$

Come è evidente dalla definizione e dalla discussione precedente, si ha: $C(v) \subseteq I(v)$. Abbiamo già notato che può essere $I(v) = \emptyset$, quindi a maggior ragione non ci stupiremo che possa essere $C(v) = \emptyset$. Quello che forse a prima vista è meno prevedibile, è che anche per un gioco superadditivo può essere $C(v) = \emptyset$.

Esempio 1.3 Consideriamo il gioco di maggioranza dell'esempio (1.1). Se vogliamo che $x \in \mathbb{R}^3$ stia in $C(v)$ deve essere:

$$x_1 + x_2 \geq v(\{1, 2\}) = 1$$

$$x_1 + x_3 \geq v(\{1, 3\}) = 1$$

$$x_2 + x_3 \geq v(\{2, 3\}) = 1$$

Sommando membro a membro si ottiene: $2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 3$, cioè $x_1 + x_2 + x_3 \geq 3/2$. Ma questo è evidentemente incompatibile con la condizione $x_1 + x_2 + x_3 = v(N) = 1$. In termini intuitivi, ciò accade è che le coalizioni "intermedie" sono troppo forti relativamente alla grande coalizione.

Esercizio 1.5 Provare che il gioco dei guanti, con $|L| = 1000$ e $|R| = 1001$ ha una sola allocazione nel nucleo. Quale è?

Esercizio 1.6 Un TU-game (N, v) si dice semplice se $v(N) = 1$ e se $v(S)$ vale 0 oppure 1 per ogni coalizione S . Diremo che una coalizione S è vincente se $v(S) = 1$. Un giocatore che appartenga ad ogni coalizione vincente viene detto "veto-player". Dimostrare che il nucleo di un gioco semplice è non vuoto se e solo se vi sono veto-player. Nel caso del Consiglio di Sicurezza dell'ONU, trovare gli elementi del nucleo.

Come fanno intravedere gli esempi e gli esercizi, il nucleo di un gioco dà conto della forza dei vari giocatori (espressa attraverso $v(S)$). Tuttavia, ne tiene conto in modo per così dire "rigido". Tanto è vero che nel gioco di maggioranza il nucleo è vuoto. Oppure, nel gioco dei guanti si ha una ripartizione dei "profitti" che sembra eccessivamente unilaterale. Ancora per i

giochi semplici (in particolare, vedasi l'esempio dell'ONU), "tutto" il potere è nelle mani dei "veto-player". A questi problemi se ne aggiunge un altro: il nucleo di un gioco (se non vuoto) contiene in genere più di una allocazione. Quindi, il nucleo non ci offre "la" soluzione, bensì solo un modo per scartare, per così dire, allocazioni che sarebbero instabili (se $\sum_{i \in S} x_i < v(S)$, la coalizione S ha interesse a "defezionare" dalla grande coalizione N , se si insiste sulla ripartizione (x_1, x_2, \dots, x_n)).

Vi è un altro concetto di soluzione che viene incontro a questo tipo di obiezioni (ma "ovviamente" gliene potremo fare altre, di altro genere...): si tratta del cosiddetto "valore Shapley".

Un modo per introdurre il valore Shapley è quello di usare la strada "assiomatica" già usata da Nash per i problemi di contrattazione. Ci chiediamo, cioè quali proprietà "debba" soddisfare un ragionevole criterio di allocazione di $v(N)$ tra i giocatori.

Un primo criterio, ovvio, è l'anonimità. Cioè, quanto viene dato ad un giocatore non deve dipendere da "chi è" questo giocatore (cioè, se si tratta di Marco o Enrico), ma solo da quanto il giocatore è in grado di ottenere da solo o con altri. Vediamo un esempio.

Esempio 1.4 Abbiamo tre giocatori che per semplicità chiameremo 1, 2, 3. Si ha: $v(1) = v(2) = v(3) = 0$; $v(1, 2) = v(1, 3) = 4$; $v(2, 3) = 6$; $v(1, 2, 3) = 20$

Consideriamo ora un altro gioco, w , che assegna agli stessi giocatori (e alle loro coalizioni) i seguenti valori: $w(1) = w(2) = w(3) = 0$; $w(2, 3) = w(1, 3) = 4$; $w(1, 2) = 6$; $w(1, 2, 3) = 20$. Che differenza c'è tra il gioco v e quello w ? Che in w il giocatore 3 si trova nella identica situazione in cui il giocatore 1 si trovava nel gioco v . L'idea di anonimità richiede che noi diamo al giocatore 3, nel gioco w , esattamente quello che diamo al giocatore 1 nel gioco v . Si noti che in questo esempio abbiamo usato notazioni SCORRETTE. Dovremmo scrivere $v(\{1\})$ invece di $v(1)$, $v(\{1, 2\})$ invece di $v(1, 2)$, ecc. Ma tutti fanno così, perchè è cosìnoioso scrivere tutte quelle parentesi graffe...

Non ci resta che formalizzare il tutto.

Indichiamo con $\mathcal{G}(N)$ l'insieme di tutti i giochi (N, v) che sono definiti sull'insieme di giocatori N . Diciamo "valore" una funzione $\Phi : \mathcal{G}(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$, dove $n = |N|$. Vale a dire, un "valore" è una regola che ad ogni gioco avente N come insieme dei giocatori associa una allocazione.

Sia $\sigma : N \rightarrow N$ una permutazione di N . Ad esempio $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 1$. Dato un gioco v su N , indichiamo con σv il gioco seguente: $\sigma v(S) = v(\sigma(S))$

Esempio 1.5 Sia $N = \{1, 2, 3\}$. Prendiamo $\sigma : N \rightarrow N$ così definita: $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 1$. Se $S = \{1, 2\}$, abbiamo che $\sigma(S) = \{\sigma(1), \sigma(2)\} = \{3, 2\} = \{2, 3\}$. Quindi, $\sigma v(1, 2) = v(2, 3)$. Se prendiamo $T = \{2, 3\}$, abbiamo che $\sigma(T) = \{\sigma(2), \sigma(3)\} = \{2, 1\} = \{1, 2\}$. Quindi, $\sigma v(2, 3) = v(1, 2)$. Dovrebbe essere evidente che il gioco w nell'esempio precedente non è altro che il gioco σv , essendo σ la permutazione che stiamo considerando (quella che scambia 1 con 3).

L'idea è ovviamente di chiedere che:

Assioma 1.1 [Anonimità] Sia v un gioco e $\sigma : N \rightarrow N$ una permutazione. Allora, $\Phi_{\sigma(i)}(\sigma v) = \Phi_i(v)$.

Cioè nell'esempio: sia $i = 1$. Allora $\sigma(i) = \sigma(1) = 3$. Vogliamo quindi che $\Phi_3(\sigma v) = \Phi_3(w) = \Phi_1(v)$. Cioè quel che viene assegnato al giocatore 1 nel gioco v , deve essere assegnato al giocatore 3 nel gioco w .

Un'altra condizione che imponiamo a Φ è la seguente:

Assioma 1.2 [Efficienza] Per ogni gioco v , $\Phi(v)$ è una pre-imputazione.

L'interpretazione di questo assioma è ovvio, deve essere $\sum_{i \in N} \Phi_i(v) = v(N)$. Quindi, il "valore" Φ deve ripartire tra i giocatori quello che riesce ad ottenere la grande coalizione.

Per introdurre l'assioma successivo abbiamo bisogno di dire cos'è il contributo marginale di un giocatore. Se S è una coalizione, ed $i \in S$, il numero reale $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ viene detto contributo marginale di i alla coalizione S . Se si ha che $v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(i)$ per ogni coalizione S che non contiene i , il giocatore i viene detto "dummy player". In altri termini, se ad una coalizione S si aggiunge il giocatore i , ciò non ha alcun effetto particolarmente significativo: il giocatore i si porta dietro la sua dote ma il suo arrivo nella coalizione S non provoca alcun guadagno ulteriore.

Assioma 1.3 [Dummy player] Se in un gioco v il giocatore i è un "dummy player", allora $\Phi_i(v) = v(i)$.

L'ultima condizione è molto facile da enunciare:

Assioma 1.4 [Additività] $\Phi_i(v + w) = \Phi_i(v) + \Phi_i(w)$, per ogni $i \in N$.

Dei quattro assiomi quest'ultimo è il più discutibile, in quanto sommare due giochi può produrre un terzo gioco in cui la posizione "strategica" del giocatore i potrebbe essere difficilmente correlata a quella che lui ha nei due giochi

“addendi”.

Teorema 1 (Shapley, 1953) *Esiste ed è unica $\Phi : \mathcal{G}(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$ che soddisfa gli assiomi 1, 2, 3, 4. Inoltre, si ha:*

$$\Phi_i(v) = \left(\frac{1}{n!}\right) \sum_{\sigma} m_i^{\sigma}(v) \text{ per ogni } i \in N$$

Per capire la formula, dobbiamo sapere cosa vuol dire $m_i^{\sigma}(v)$. L'idea è semplice $\sigma : N \rightarrow N$ è una permutazione. Consideriamo $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$. Essendo $i \in N$, ci sarà un certo indice $j \in N$ t.c. $i = \sigma(j)$. Consideriamo allora la coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j-1)\}$. E la coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j)\}$. Essendo $i = \sigma(j)$, abbiamo che i non appartiene alla coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j-1)\}$, mentre $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j)\}$ è ottenuta aggiungendo i . Allora $v(\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j)\}) - v(\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j-1)\})$ è il contributo marginale di i alla coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j-1)\}$. E $m_i^{\sigma}(v)$ indica esattamente ciò: $m_i^{\sigma}(v) = v(\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j)\}) - v(\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(j-1)\})$ dove $i = \sigma(j)$.

La formula ha una interpretazione probabilistica. Supponiamo che i giocatori entrino uno dopo l'altro in una stanza, seguendo l'ordine dato dalla permutazione σ . Ad ogni giocatore, entrando nella stanza, viene dato il suo contributo marginale alla coalizione che già si trovava nella stanza. Non c'è ragione di privilegiare una permutazione rispetto ad un'altra. E quindi calcoliamo il valor medio di questi contributi marginali. Da qui la formula (ricordo che $n!$ è il numero di permutazioni su un insieme di n elementi).

La formula data può naturalmente essere usata per calcolare il valore Shapley, però ha il difetto di richiedere una quantità di calcoli enorme, se il numero totale dei giocatori è grande. Si noti che ad esempio è $n! = 3.628.800$ e quindi se abbiamo un gioco con 10 giocatori questo è il numero di addendi della somma che dobbiamo calcolare applicando la formula.

Se il gioco è “piccolo”, la formula ci permette di calcolare il valore Shapley abbastanza facilmente. Vediamo un esempio.

Esempio 1.6 *Consideriamo il gioco introdotto nell'esempio 1.4. Cioè: $v(1) = v(2) = v(3) = 0$; $v(1, 2) = v(1, 3) = 4$; $v(2, 3) = 6$; $v(1, 2, 3) = 20$. Costuiamo la tabella seguente, dove nella prima colonna mettiamo le varie permutazioni possibili dei tre giocatori, mentre nella colonna “intestata” con*

i mettiamo i guadagni marginali attribuiti al giocatore i nelle varie permutazioni possibili. Le due ultime righe contengono le somme dei guadagni marginali e poi tali valori divisi per 6 (ovverossia 3!), vale a dire il valore Shapley. Si noti che $\Phi_2 = \Phi_3$.

<i>permutazione</i>	1	2	3
123	0	4	16
132	0	16	4
213	4	0	16
231	14	0	6
312	4	16	0
321	14	6	0
<i>totale</i>	36	42	42
<i>valore Shapley</i>	6	7	7

Per alcuni giochi è possibile determinare il valore Shapley molto più semplicemente, pur di sfruttare caratteristiche specifiche del gioco.

Esempio 1.7 (Gioco dell'aeroporto) *Sia dato un aeroporto in cui atterrano differenti tipi di aereo che richiedono una pista di lunghezza differente a seconda delle loro caratteristiche: si vuole determinare come ripartire il costo di costruzione e manutenzione della pista tra gli aerei che la utilizzano.*

Gli aerei² possono essere raggruppati a seconda della lunghezza di pista necessaria in t sottoinsiemi disgiunti N_1, N_2, \dots, N_t in modo che gli aerei del sottoinsieme N_i richiedano una pista di costo C_i con C_i, C_{i+1} .

Otteniamo un gioco (dei costi) assegnando ad ogni coalizione il costo della pista necessaria all'aereo più grosso della coalizione, cioè:

$$v(S) = C_{j(S)} \quad \text{dove} \quad j(S) = \max\{i | S \cap N_i \neq \emptyset\}$$

. Si può dimostrare che il valore Shapley di ogni aereo corrisponde alla ripartizione dei costi ottenuta nel seguente modo:

- *Il costo del primo tratto di pista C_1 è diviso tra tutti gli aerei, poiché tutti gli aerei lo utilizzano*
- *il costo del secondo tratto ($C_2 - C_1$) è diviso tra gli aerei che lo utilizzano, ovverossia quelli di $N_2 \cup \dots \cup N_t$*
- *etc.*

²più propriamente: gli atterraggi che avvengono in una data unità di tempo, ad esempio un anno (in tal caso, per quanto riguarda i costi di costruzione, verrà considerata la quota annua di ammortamento)

- *l'ultimo tratto , di costo $C_t - C_{t-1}$ è suddiviso tra gli aerei del gruppo N_t che sono gli unici ad usarlo*

Questa regola ha il pregio di essere meno dispendiosa in termini di calcoli richiesti. Per di più ha anche una ovvia interpretazione, che è interessante di per sé: ovvero, il costo di ogni tratto di pista è equamente ripartito tra tutti e soli gli apparecchi che lo utilizzano. Vale a dire, ciascuno paga solo per il servizio che usa effettivamente. Non solo, ma ognuno contribuisce in ugual misura perchè ognuno lo utilizza in ugual misura. Si tratta di un principio generale, applicabile nel caso di costi (o guadagni) decomponibili.