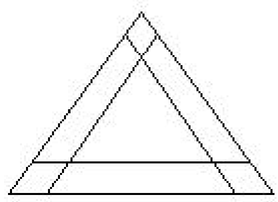
1 Esistenza di equilibri ϵ-constrained; equilibri perfetti

Consideriamo (X, Y, f, g), con $X = \{x_1, .., x_m\}$ e $Y = \{y_1, .., y_n\}$.
Anziché considerare $\triangle(X), \triangle(Y)$ e le relative estensioni di f e g a tali insiemi supponiamo che sia dato $\epsilon > 0$. E che siano dati $0 < \epsilon_1^I, ..., \epsilon_m^I, \epsilon_1^{II}, ..., \epsilon_n^{II} \leq \epsilon$
Consideriamo $\triangle_{\epsilon_1^I,..,\epsilon_m^I}(X) = \triangle_{\epsilon^I}(X)$, cioè prendiamo $\{p \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m p_i = 1,\ p_i \geq \epsilon_i^I\}$. E analogamente $\triangle_{\epsilon_1^{II},..,\epsilon_m^{II}}(Y) = \triangle_{\epsilon^{II}}(Y)$.



Interessiamoci dell'estensione bilineare di f e g ristretti però su questi insiemi.
Allora $(\triangle_{\epsilon^I}(X), \triangle_{\epsilon^{II}}(Y), f, g)$ è un gioco e soddisfa anche le condizioni del teorema di Nash!!!
Quindi $\forall \epsilon > 0, \exists$ almeno un equilibrio ϵ-vincolato.
Consideriamo ora $\epsilon_n \searrow 0$.
Siano $(\bar{x_n}, \bar{y_n})$ equilibri ϵ_n-vincolati.
La successione $(\bar{x_n}, \bar{y_n})$ vive in un compatto di $\mathbb{R}^k$. Allora esiste una sottosuccessione estratta convergente a un certo $(\bar{x}, \bar{y}) \in \triangle(X) \times \triangle(Y)$

Esercizio 1.1 *Dimostrare che $(\bar{x}, \bar{y})$ è un equilibrio di Nash.*
Suggerimento: sfruttare il fatto che f è uniformemente continua su $\triangle(X) \times \triangle(Y)$.

Ora questi equilibri di Nash sono un po' speciali: cioè sono equilibri di Nash perfetti.
Un N.E. si dice perfetto se esiste una successione di equilibri ϵ_n-vincolati che converge verso di lui.

Esempio 1.1

$I \backslash II$	L	R
T	1 1	0 0
B	0 0	0 0

(T, L) *equilibrio di Nash perfetto.* (B, R) *equilibrio di Nash non perfetto.*
Idea : *"trembling hand". Un tizio vuole premere il bottone (T, oppure B) che ha scelto, ma non può escludere che ci sia una probabilità, per quanto piccola, che lui schiacci il pulsante sbagliato!*
L'idea di equilibrio perfetto cerca di cogliere questo fatto.