1 Equilibrio di Nash e best reply

Modo “pratico” per trovare un equilibrio di Nash in una bimatrice:

$I \backslash II$	L	CL	CR	R
T	(3) 4	−1 [6]	3 0	(2) −3
M	2 0	4 0	(5) 0	(2) [1]
B	0 4	(8) [6]	0 −8	−1 1

Su ogni colonna mettiamo tra parentesi rotonde il numero (o i numeri) più alto per I.
Su ogni riga mettiamo tra parentesi quadre il numero (o i numeri) più alto per II.
Gli equilibri di Nash sono tutte e sole le caselle dove troviamo tra parentesi entrambi i numeri.
Nell'esempio (B,CL) (M,R) sono due equilibri di Nash (non ce ne sono altri).
<u>Nota</u> Si noti che (B,CL) è preferito a (M,R) sia da I che da II (altra stranezza degli equilibri di Nash).
<u>Perchè il metodo funziona?</u>
Se $(\bar{x}, \bar{y})$ è tra parentesi vuole dire che:
$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y})$ per ogni x, avendo fissato $\bar{y}$
Cioè, $f(\bar{x}, \bar{y})$ ci dá il max di f sulla colonna individuata da $\bar{y}$
Evidentemente, abbiamo un pezzo della definizione di equilibrio di Nash, ovviamente l'altro viene considerando g sulla riga individuata da $\bar{x}$.
Si noti che in tutto questo non c'entrano nulla le matrici o il fatto che X,Y siano finiti.
Sia allora (X, Y, f, g) un qualsiasi gioco.

Definizione 1.1 $R_I : y \rightrightarrows x$ *così (il perché delle due fecce sarà chiarito presto).*
Dato $y \in Y, R_I(y) = \{\hat{x} \in X : f(\hat{x}, y) \geq f(x, y)\ \forall x \in X\}$.
Ovvero $R_I(y) =\ argmax f(., y) =\ argmax_{x \in X} f(x, y)$

Nota: la definizione dipende solo da $\succeq_I$ *e* $\succeq_{II}$!!
Le due frecce servono per indicare che R_I non è una funzione da Y a X, ma è una multiapplicazione: ovvero R_I associa ad ogni $y \in Y$ un sottoinsieme di X eventualmente vuoto.
Potremmo anche usare $\hat{R}_I : Y \rightarrow\ \mathcal{P}(X)$, ma per ragioni che valuteremo dopo è più conveniente seguire la strada delle multiapplicazioni.
È evidente che:

$$(\bar{x},\bar{y}) \text{ è N.E.} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} \in R_I(\bar{y}) \\ \bar{y} \in R_{II}(\bar{x}) \end{cases}$$

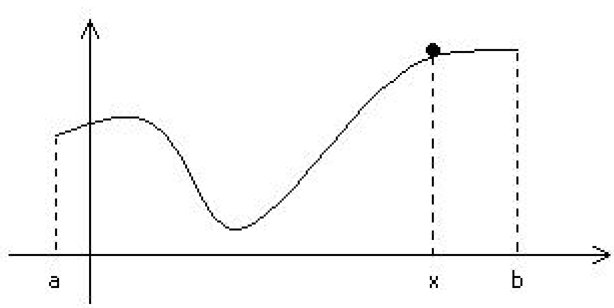
È solo la formalizzazione di quanto avevamo visto sopra. Comunque farlo per esercizio.
Possiamo anche introdurre $R : X \times Y \rightrightarrows X \times Y$.
Definita così: $R(x,y) = R_I(y) \times R_{II}(x)$.
Usando R, abbiamo: $(\bar{x},\bar{y})$ è N.E. $\Leftrightarrow (\bar{x},\bar{y}) \in R(\bar{x},\bar{y})$.

Esercizio 1.1 *Provare a generalizzare tutto questo al caso di n giocatori* $(X_1,...,X_n,f_1,...f_n)$.

2 Punto fisso

L'equivalenza:
$(\bar{x},\bar{y})$ N.E. $\Leftrightarrow (\bar{x},\bar{y}) \in R(\bar{x},\bar{y})$ ci permette di "ridurre" il problema di trovare un eqilibrio di Nash a quello di trovare un punto fisso per R.
Se R fosse una funzione ed identificassimo allora il singleton $R(x,y)$ con l'unico suo elemento, potremmo scrivere $(\bar{x},\bar{y}) = R(\bar{x},\bar{y})$.

Si noti che l'idea di ridurre un problema di equilibrio a quello di un punto fisso (o viceversa) è un'idea generale.
Immaginiamo un sistema dinamico discreto, (cioè a tempi discreti, per semplicità). Ho una funzione: $T : X \to X$ tale che $x \to T(x)$. Mi dice che se x è ora lo stato del sistema $T(x)$ è lo stato del sistema all'istante successivo.
Un punto di equilibrio è un punto dal quale il sistema "non si sposta" (i.e. $T(x) = x$).
D'altronde, molte volte T (la dinamica del sistema) è legato alla minimizzazione o massimizzazione di un potenziale.
Si possono fare esempi molto elementari: tipo una pallina su una guida.

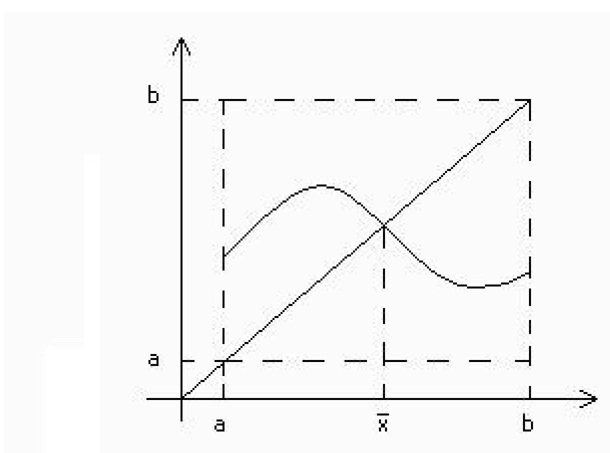


$X = [a,b]$

Se la pallina si trova nella posizione di ascissa x, essa è soggetta alle forze di gravità, la quale ha una componente orrizzontale se e solo se $f'(x) \neq 0$.

Quindi ci aspettiamo che si sposti (cioè $T(x) \neq x$, anche se non è molto chiaro qui come interpretare $T(x)$: dovrebbe essere la posizione della pallina (ascisse) dopo un intervallo infinitesimo di tempo...) se e soltanto se $f'(x) \neq 0$. Il che può essere ricondotto (se trascuriamo l'esistenza dei flessi) ad un problema di max e min.
Come si vede, ci sono molte cose da sistemare da un punto di vista formale. Ma l'intento è mettere in evidenza il principio.
Problema Pensate voi ad esempi.
Allora, avendo ridotto il problema di ricerca di N.E. a un problema di ricerca di punti fissi, chiediamoci che teoremi abbiamo a disposizione.
Quelli classici sono due: 1 contrazioni, 2 Brouwer.
Ovviamente li potremmo applicare direttamente solo quando R fosse una funzione.
Il teorema delle contrazioni difficilmente si riesce ad applicarlo, perché raramente possiamo ottenere che R sia una contrazione.
Il teorema di Brouwer si presta di più al nostro tipo di problema.

Teorema 2.1 (Brouwer) *Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$, K compatto, convesso e non vuoto. Sia $f : K \to K$ continua allora f ha un punto fisso.*



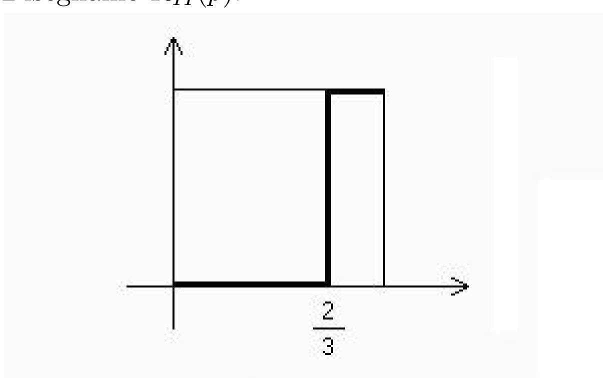
$K = [a, b]$, $\quad$ *$\bar{x}$ punto fisso.*

3 La battaglia dei sessi

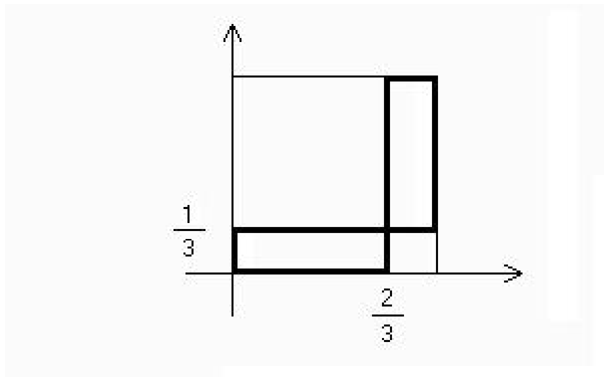
Prendiamo il gioco più volte visto:

$I \backslash II$	L	R
T	2 1	0 0
B	0 0	1 2

E chiediamoci come sia fatta la best reply per la sua estensione mista.
$\Delta(\{T,B\}) \equiv [0,1)$ $\quad \Delta(\{L,R\}) \equiv [0,1]$
$P = (p, 1-p)$ $\quad q = (q, 1-q)$ (abuso di notazione)
$f(p,q) = 2pq + 1(1-p)(1-q)$
$g(p,q) = pq + 2(1-p)(1-q)$
non metto $\hat{f}, \hat{g}$, come già avvisato a suo tempo.
Cerchiamo $R_{II}(p)$.
Fissiamo $\bar{p} \in [0,1]$ e cerchiamo $argmax_{q \in [0,1]} g(\bar{p}, q)$
$g(\bar{p},q) = \bar{p}q + 2(1-\bar{p})(1-q) = \bar{p}q + 2 - 2\bar{p} - 2q + 2\bar{p}q = (3\bar{p}-2)q + 2 - 2\bar{p}$
$3\bar{p} - 2 > 0 \Leftrightarrow \bar{p} > 2/3$
Se $\bar{p} < 2/3$ $argmax g(\bar{p}, q) = \{0\}$
Se $\bar{p} = 2/3$ $argmax g(\bar{p}, q) = [0,1]$ $\;$ $g(\bar{p}, q) = g(2/3, q)$ è costante.
Se $\bar{p} > 2/3$ $argmax g(\bar{p}, q) = \{1\}$
Disegnamo $R_{II}(p)$.



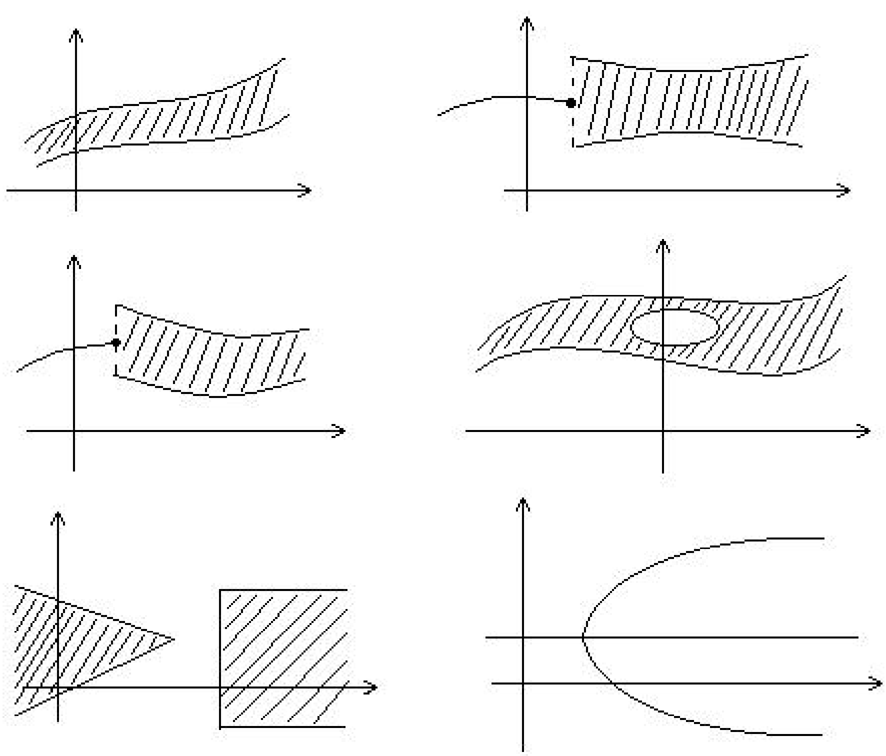
Calcoliamo ore $R_I(p)$. Cerchiamo $R_I(q)$. Fissiamo $\bar{q} \in [0,1]$ e cerchiamo $argmax_{p \in [0,1]} f(p, \bar{q})$
$f(p,\bar{q}) = 2\bar{q}p + (1-p)(1-\bar{q}) = 2p\bar{q} + 1 - p - \bar{q} + p\bar{q} = (3\bar{q}-1)p + 1 - \bar{q}$
$3\bar{q} - 1 > 0 \Leftrightarrow \bar{q} > 1/3$.
Se $\bar{p} < 1/3$ $argmax f(p, \bar{q}) = \{0\}$.
Se $\bar{p} = 1/3$ $argmax f(p, \bar{q}) = [0,1]$ $\;$ $g(\bar{p}, q) = g(2/3, q)$ è costante.
Se $\bar{p} > 1/3$ $argmax f(p, \bar{q}) = \{1\}$
È costante $f(p, 1/3)$!
Disegnamo il “grafico” sia di $R_I(q)$ che di $R_{II}(p)$



Osserviamo come né R_I né R_{II} siano funzioni, ma come siano invece delle multiapplicazioni: anche in un gioco semplice e per nulla complicato come il gioco della Battaglia dei Sessi.

4 Multiapplicazioni

La prima cosa che possiamo provare a fare è disegnare il grafico di una multiapplicazione.



Allora una multiapplicazione $F : A \rightrightarrows B$ è una legge che ad ogni $a \in A$ associa un sottoinsieme $F(a)$ di B.
Questo $F(a)$ può anche essere vuoto. Se $F(a) \neq \emptyset \ \forall a \in A$ diremo che abbiamo una corrispondenza (ovverossia multiapplicazioni a valori non vuoti).
Si noti che $F : A \rightrightarrows B$ individua $\hat{F} : A \to \mathcal{P}(B)$ (e viceversa). Ovviamente $\hat{F}$ ha un grafico come tutte le funzioni, solo che è difficile da visualizzare.
Meglio occuparsi del grafico "ridotto" di F.
(Uso il termine grafico ridotto per rimarcare che non è un grafico di una funzione nel senso usuale del termine).
$\mathrm{gph}(F) = \{\ (a, b) \in A \times B : \quad b \in F(a)\}$
I disegni fatti prima per la battaglia dei sessi sono i grafici ridotti di R_I e R_{II}.

Esercizio 4.1 *Provare che:*

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}(\bar{x}, \bar{y}) \Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{x}, \bar{y}) \in \ gph\ (R_{II}) \\ (\bar{y}, \bar{x}) \in \ gph\ (R_I) \end{cases}$$

Esercizio 4.2 *Definire F^{-1} per una multiapplicazione e notare che gph (F^{-1}) è "simmetrico" di gph(F), nel senso che $(a, b) \in gph\ \ (F) \Leftrightarrow (b, a) \in gph\ (F^{-1})$.*
Dedurre che
$(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}(\bar{x}, \bar{y}) \Leftrightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in \ (gph\ (R_{II})) \cap (gph\ (R_I^{-1}))$

Diciamo che una multiapplicazione è a valori chiusi (rispettivamente convessi, aperti, etc..).
F(a) è chiuso (risp: convesso chiuso aperto, etc..) per ogni $a \in A$. Ovviamente si servirà che B sia spazio topologico, o spazio vettoriale, etc a seconda dei casi.
Se A e B sono spazi topologici, ci piacerebbe potere dire se e quando F è "continua". In realtà si rivelano più importanti le condizioni di "semicontinuità" per F.
Ad esempio, il disegno 2 è il grafico di un F semicontinua superiormente, mentre quello 3 rappresenta una F semicontinua inferiormente.
Nessuna delle due è "continua", mentre lo sono quelle di tutti gli altri disegni.
L'approccio più coerente alle (semi)continuità di F passa attraverso le topologizzazioni di $\mathcal{P}(B)$, mediante le cosidette topologie di Vietoris.
Ma a noi basta solo la SCS di R. E, approfittando del fatto che R sarà a valori in un compatto, possiamo cavarcela facilmente, usando la nozione di multiapplicazione e grafico (ridotto) chiuso. Notazione che non è equivalente in generale alla SCS, ma lo è quando la multiapplicazione è a valori in un

compatto.
La definizione è ovvia.

Definizione 4.1 *Siano A, B spazi topologici e $F : A \rightrightarrows B$. Diremo che F ha grafico (ridotto) chiuso se gph(F) è un sottoinsieme chiuso di $A \times B$*

Osservazione 4.1 *Se A, B sono spazi topologici (quindi ad es se A, B sono spazi metrici; a maggior ragione se A, B sono ad esempio sottoinsiemi di uno spazio euclideo di dimensione finita).*
Allora gph(F) è chiuso $\Leftrightarrow$ è sequenzialmente chiuso. Cioè:

$$\left.\begin{array}{c}(a_n, b_n) \in \ gph\ (F) \\ (a_n, b_n) \to (a, b)\end{array}\right\} \Rightarrow (a, b) \in \ gph\ (F)$$

Questo può essere riscritto così :

$$\left.\begin{array}{c}(a_n) \to a \\ (b_n) \to b \\ (b_n) \in F(a_n)\end{array}\right\} \Rightarrow b \in F(a)$$