0.1 Decisioni

Chi è il decisore?

Esempio

strategia / stato del mondo	piove	non piove
prendo l'ombrello	non mi bagno	non mi bagno (ho l'ombrello)
non prendo l'ombrello	mi bagno	non mi bagno (non ho l'ombrello)

Un decisore prudente prende sempre l'ombrello, ma in generale è necessario valutare *l'utilità* del decisore nei singoli casi

Ombrello ingombrante percorso lungo

strategia / stato del mondo	piove	non piove
prendo l'ombrello	0	-2
non prendo l'ombrello	-2	0

Ombrello ingombrante percorso breve

strategia / stato del mondo	piove	non piove
prendo l'ombrello	-1	-2
non prendo l'ombrello	-1	0

Ombrello tascabile percorso lungo

strategia / stato del mondo	piove	non piove
prendo l'ombrello	0	-1
non prendo l'ombrello	-2	0

Ombrello tascabile percorso breve

strategia / stato del mondo	piove	non piove
prendo l'ombrello	0	-1
non prendo l'ombrello	-1	0

3.2 Introduzione

La Teoria dei Giochi tratta le situazioni in cui il risultato dipende dalle scelte fatte da più persone, dette *giocatori*, che operano perseguendo obiettivi che possono risultare comuni, ma non identici, differenti ed eventualmente contrastanti; possono essere presenti anche aspetti aleatori

Il nome deriva da *Theory of Games and Economic Behavior* di von Neumann e Morgenstern (1944)

Esempio 3.1 (Dilemma del prigioniero)

I/II	C	NC
C	$-5, -5$	$-1, -6$
NC	$-6, -1$	$-2, -2$

$\diamondsuit$

Esempio 3.2 (Battaglia dei sessi)

I/II	T	P
T	$2, 1$	$0, 0$
P	$0, 0$	$1, 2$

$\diamondsuit$

Esempio 3.3 (Puro coordinamento)

I/II	T	P
T	$1, 1$	$0, 0$
P	$0, 0$	$1, 1$

$\diamondsuit$

- Nell'Esempio 3.2 (e soprattutto nel 3.3) una telefonata, un accordo al 50 per cento o una strategia correlata possono risolvere facilmente il problema
- Nell'Esempio 3.1 la possibilità di comunicare renderebbe probabile un accordo per la strategia NC, ma al momento della decisione sia I che II risceglierebbero C, poichè $-1 > -2$

Classificazione di Harsanyi (1966):

Giochi non cooperativi	Non sono possibili accordi vincolanti tra i giocatori
Giochi cooperativi	Sono possibili accordi vincolanti tra i giocatori

- Attualmente si preferisce assumere, più restrittivamente, che in un gioco non cooperativo i giocatori non possano nemmeno comunicare in quanto ciò potrebbe alterare il risultato
- I giochi cooperativi sono divisi in due sottoclassi: giochi a utilità non trasferibile (NTU) o senza pagamenti laterali, e giochi a utilità trasferibile (TU) o a pagamenti laterali, che costituiscono un caso particolare dei giochi NTU

3.3 Rappresentazione di un gioco

- forma estesa - von Neumann (1928) e Kuhn (1953)
- forma strategica - Shubik (1982); forma normale - von Neumann e Morgenstern (1944)
- forma caratteristica - von Neumann e Morgenstern (1944); per i giochi cooperativi

Definizione 3.1

- *Si chiama funzione dei pagamenti (payoff) una funzione f che assegna ad ogni giocatore la sua vincita per ogni possibile terminazione del gioco*
- *Si chiama strategia del giocatore i una funzione σ_i che assegna al giocatore i una mossa per ogni possibile situazione del gioco*

La strategia è un “piano di azione” che individua in ogni situazione del gioco una “azione” tra le tante possibili

3.4 Forma estesa

Descrizione puntuale del gioco, delle mosse e delle relative probabilità, della situazione dopo ogni mossa, delle strategie, degli insiemi di informazione (insiemi di nodi che globalmente rappresentano la situazione di un giocatore), ecc.; risulta molto ricca ma poco maneggevole

Si utilizza una rappresentazione ad albero in cui:

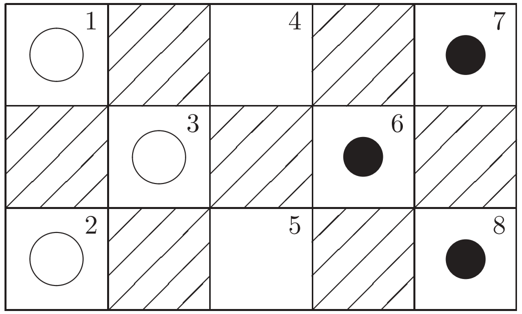
nodi	possibili situazioni del gioco
archi uscenti da un nodo	possibili mosse del giocatore chiamato a muovere
nodi terminali	valori delle vincite (payoff) di ciascun giocatore

Esempio 3.4 (Dama semplificata)

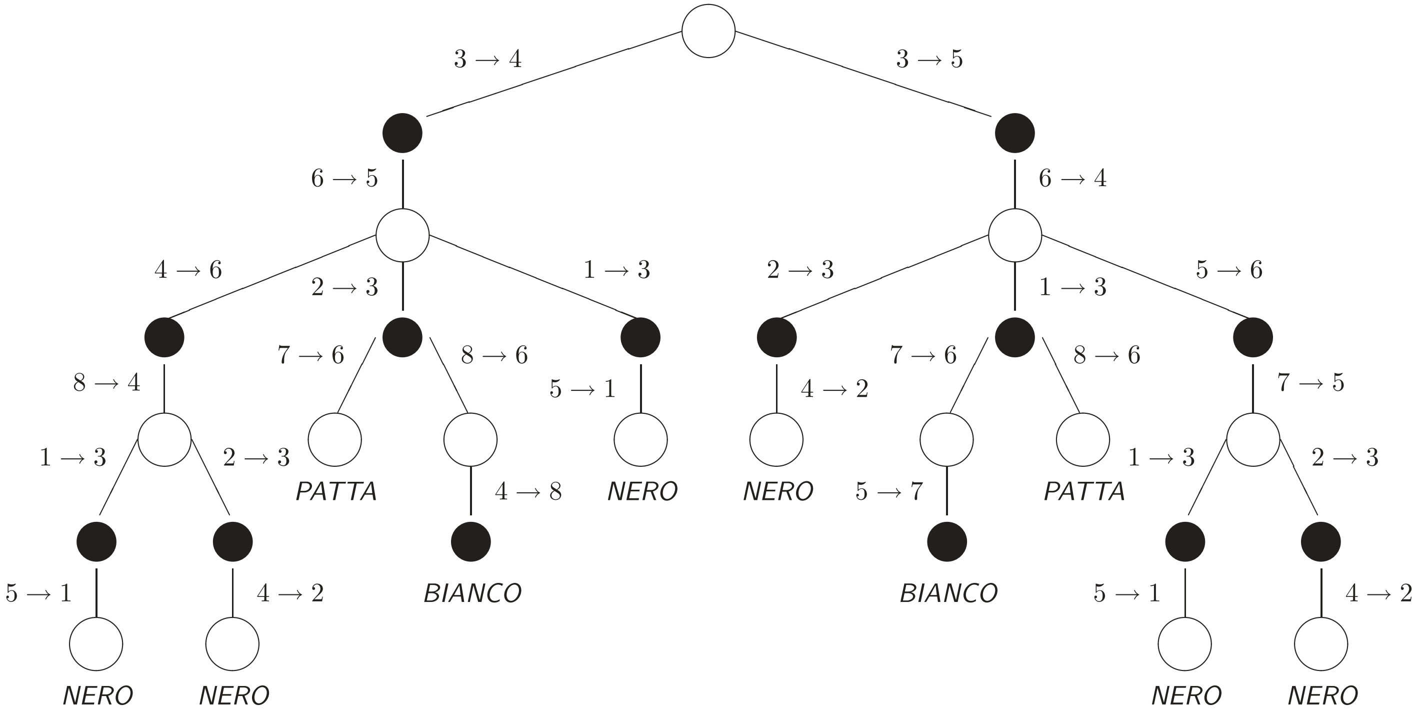
E' obbligatorio "mangiare"

Vince chi riesce a portare per primo una sua pedina sull'ultima colonna

Parità se un giocatore non può muovere



Forma estesa:



3.5 Forma strategica

$2n$-upla $(\sum_1, \sum_2, \ldots, \sum_n, f_1, f_2, \ldots, f_n)$ dove:

$\sum_1, \sum_2, \ldots, \sum_n$ insiemi non vuoti delle possibili strategie di ogni giocatore

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ funzioni reali $f_i : \prod_{k=1,\ldots,n} \Sigma_k \to \mathbb{R}, \qquad i = 1, .., n$

- Tutti i giocatori scelgono contemporaneamente la loro strategia e la f_i dice quale è il guadagno del giocatore i determinato dalle scelte fatte
- E' possibile passare dalla forma estesa a quella strategica (il passaggio inverso è più complesso)
- Gli elementi della forma strategica possono essere riassunti in una tabella come negli esempi precedenti
- Se il gioco è a due giocatori si parla di *gioco a matrice doppia* o *bimatrice*

3.6 Forma caratteristica

Può essere usata solo per i giochi cooperativi

Definizione 3.2

- *Detto N l'insieme dei giocatori, ogni sottoinsieme S di N è detto coalizione. Se $S = N$ si ha la grande coalizione*
- *Si dice funzione caratteristica di un gioco ad n giocatori una funzione indicata con v (se il gioco è senza pagamenti laterali si usa V ed è più complessa) per cui si ha:*

$$v : \wp(N) \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } v(\emptyset) = 0$$

- *Se per ogni coppia di coalizioni disgiunte S e T si ha $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$ la funzione v è detta additiva; se si ha $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ la funzione v è detta superadditiva; se si ha $v(S \cup T) \leq v(s) + v(T)$ la funzione v è detta subadditiva*
- v assegna ad S la massima vincita possibile indipendentemente dal comportamento degli altri giocatori
- La funzione caratteristica e il gioco possono essere identificati

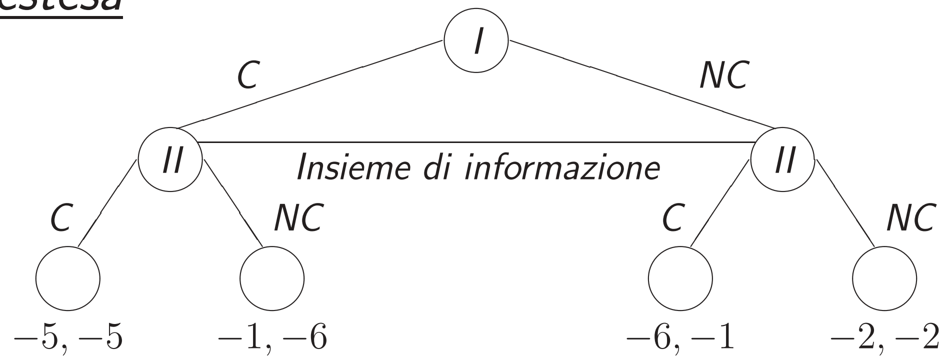
Un gioco descritto tramite la funzione caratteristica è detto in *forma caratteristica* o *coalizionale*
Se la funzione caratteristica è additiva o superadditiva o subadditiva anche il gioco è detto *additivo* o *superadditivo* o *subadditivo*
Se per ogni coalizione S si ha $v(S) + v(N \setminus S) = v(N)$ il gioco è detto *a somma costante*

Esempio 3.5 (Maggioranza semplice)
Tre giocatori vogliono conseguire un risultato; se almeno due di essi si uniscono raggiungono il loro obiettivo. Questa situazione può essere rappresentata dal seguente gioco:
$N = \{1, 2, 3\}$
$v(\emptyset) = v(1) = v(2) = v(3) = 0; v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = v(1, 2, 3) = 1$ ♢

La descrizione del gioco è molto "povera", in quanto non permette di definire la vincita di ogni singolo giocatore della coalizione, ma solo la vincita complessiva

Esempio 3.6 (Rappresentazioni del dilemma del prigioniero)

Forma estesa



Forma strategica

$$\Sigma_I = \{C, NC\}; \Sigma_{II} = \{C, NC\}$$
$$f_I(C,C) = -5; f_I(C,NC) = -1; f_I(NC,C) = -6; f_I(NC,NC) = -2$$
$$f_{II}(C,C) = -5; f_{II}(C,NC) = -6; f_{II}(NC,C) = -1; f_{II}(NC,NC) = -2$$

Forma caratteristica

$$N = \{I, II\}$$
$$v(\emptyset) = 0; v(I) = v(II) = -5; v(I,II) = -4$$

$\diamondsuit$

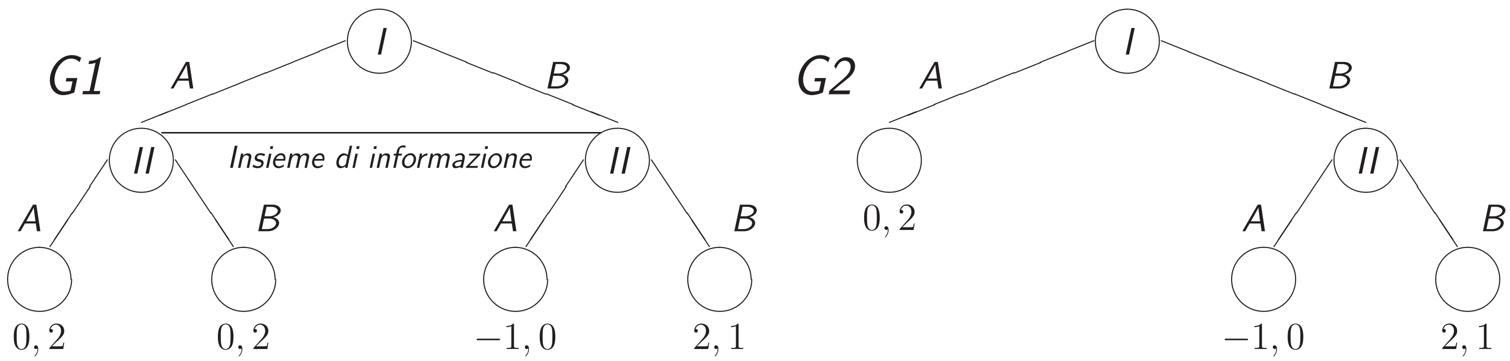
La forma estesa contiene più informazione sul gioco rispetto alla forma strategica, che risulta comunque sufficiente a rappresentare un gioco

Esempio 3.7 (Rappresentazioni in forma estesa e in forma strategica)

G1 I e II scelgono contemporaneamente tra A e B; se giocano (A, A) oppure (A, B) i payoff sono $(0, 2)$, se giocano (B, A) i payoff sono $(-1, 0)$, se giocano (B, B) i payoff sono $(2, 1)$

G2 I e II scelgono successivamente tra A e B; se I gioca A il gioco termina con payoff $(0, 2)$, se gioca B il turno passa a II; se II gioca A il gioco termina con payoff $(-1, 0)$, se gioca B il gioco termina con payoff $(2, 1)$

Forma estesa



Forma strategica

G1 - G2

I/II	A	B
A	$0, 2$	$0, 2$
B	$-1, 0$	$2, 1$

La forma strategica è unica, ma è sufficiente a descrivere i giochi $\diamondsuit$

0.1 Game Form

Con riferimento alla forma strategica
Si consideri la quadrupla (X, Y, E, h) dove:
X insieme delle strategie del giocatore I
Y insieme delle strategie del giocatore II
E insieme degli eventi (o esiti) finali
$h : X \times Y \to E$
Questa rappresentazione è detta *Game form* e descrive le regole del gioco

Per studiare il comportamento dei giocatori e quindi risolvere il gioco è necessario conoscere le *preferenze* dei giocatori sui possibili esiti, rispettivamente $\sqsupseteq_I, \sqsupseteq_{II}$, dove $E_1 \sqsupseteq_I [\sqsupseteq_{II}] E_2$, $E_1, E_2 \in E$ equivale a dire che il giocatore I $[II]$ preferisce l'esito E_1 all'esito E_2
Le preferenze possono essere rappresentate dalle funzioni di utilità:
$u : E \to \mathbb{R}$ per il giocatore I
$v : E \to \mathbb{R}$ per il giocatore II
Introducendo le funzioni di utilità indotte:
$f = u \circ h, f : X \times Y \to \mathbb{R}$ per il giocatore I
$g = v \circ h, g : X \times Y \to \mathbb{R}$ per il giocatore II
si perviene alla rappresentazione in forma strategica già vista (X, Y, f, g)

3.7 Teoria dell'utilità

I concetti di *preferenza* e di *utilità di von Neumann-Morgenstern* permettono di assegnare e interpretare i valori numerici utilizzati nelle rappresentazioni dei giochi

I giocatori cercano di massimizzare la loro utilità, ma è necessario prendere in considerazione valori differenti: economico, sentimentale, sociale, ecc.
Se un giocatore deve decidere se donare una somma di denaro senza ricevere nulla in cambio, considerando solo i valori monetari la decisione sarebbe sempre non donare

Definizione 3.3

- *Dati due eventi A e B si dice che A è preferibile a B per un giocatore se egli cerca di conseguire A invece di B e si indica con* ApB
- *Dati due eventi A e B si dice che A è indifferente a B per un giocatore se nessuno è preferibile all'altro e si indica con* AiB

Assiomi

A1 *Dati due eventi A e B allora* ApB *oppure* BpA *oppure* AiB

A2 AiA

A3 $AiB \Rightarrow BiA$

A4 $AiB, BiC \Rightarrow AiC$

A5 $ApB, BpC \Rightarrow ApC$

A6 $ApB, BiC \Rightarrow ApC$

A7 $AiB, BpC \Rightarrow ApC$

- La relazione di preferenza è solo qualitativa
- Nessun bene soddisfa l'ipotesi di linearità, tranne al più in brevi intervalli

Gli eventi possono essere certi oppure incerti secondo una probabilità nota

Definizione 3.4 *Dati due eventi A e B si chiama lotteria l'evento* $rA + (1-r)B, 0 \leq r \leq 1$, *in cui A si verifica con probabilità* r *e l'evento B con probabilità* $1-r$

- La lotteria non è una combinazione lineare di eventi, ma permette di valutare l'evento "esce A o esce B"

Proprietà

P1 $AiC \Rightarrow \{rA + (1-r)B\}i\{rC + (1-r)B\} \quad \forall r, \ \forall B$
P2 $ApC \Rightarrow \{rA + (1-r)B\}p\{rC + (1-r)B\} \quad r > 0, \forall B$
P3 $ApCpB \Rightarrow \exists! r, 0 < r < 1 \ t.c. \ \{rA + (1-r)B\}iC$

- Se un decisore soddisfa gli assiomi A1 - A7 e le proprietà P1 - P3 viene considerato "razionale"

Esempio 3.8 (Preferenze) *Siano date le lotterie:*

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \{0, 100 \quad con \quad \mathbf{P}(0) = 1/2, \mathbf{P}(100) = 1/2\} \\
E_2 &= \{40, 60 \quad con \quad \mathbf{P}(40) = 3/4, \mathbf{P}(60) = 1/4\} \\
E_3 &= \{0, 100, 40, 60 \quad con \quad \mathbf{P}(0) = 1/4, \mathbf{P}(100) = 1/4, \mathbf{P}(40) = 3/8, \mathbf{P}(60) = 1/8\}
\end{aligned}
$$

Il guadagno atteso, $E_1 = 50$, $E_2 = 45$ *e* $E_3 = 47.5$, *non impone una preferenza tra i tre eventi, ma le uniche relazioni da soddisfare sono:*

$$
\begin{aligned}
& E_1 i E_2 \Rightarrow E_1 i E_3, E_2 i E_3 \\
& oppure \\
& E_1 p E_2 \Rightarrow E_1 p E_3, E_3 p E_2 \\
& oppure \\
& E_2 p E_1 \Rightarrow E_2 p E_3, E_3 p E_1
\end{aligned}
$$

$\diamondsuit$

Dato un insieme di eventi E, una relazione di preferenza su E può essere rappresentata con una funzione di utilità $u : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che per ogni $E_1, E_2 \in E$ si ha:

$$E_1 p E_2 \Leftrightarrow u(E_1) > u(E_2)$$
$$u(rE_1 + (1-r)E_2) = ru(E_1) + (1-r)u(E_2)$$

- La funzione di utilità permette di quantificare le preferenze
- L'utilità di von Neumann-Morgenstern impone la linearità sulle lotterie

La funzione u è unica a meno di trasformazioni affini, cioè u è una funzione di utilità se e solo se lo è anche:

$$\hat{u} = \alpha u + \beta \quad \text{con} \quad \alpha > 0$$

Esempio 3.9 (Funzioni di utilità)

I/II	C	NC
C	$-5, -5$	$-1, -6$
NC	$-6, -1$	$-2, -2$

I/II	C	NC
C	$1, 1$	$5, 0$
NC	$0, 5$	$4, 4$

I/II	C	NC
C	$-4, 0$	$0, -10$
NC	$-5, 40$	$-1, 30$

Le tre matrici sono legate dalle relazioni affini:

$$u'_I = u_I + 6 \qquad u''_I = u_I + 1$$
$$u'_{II} = u_{II} + 6 \qquad u''_{II} = 10u_{II} + 50$$

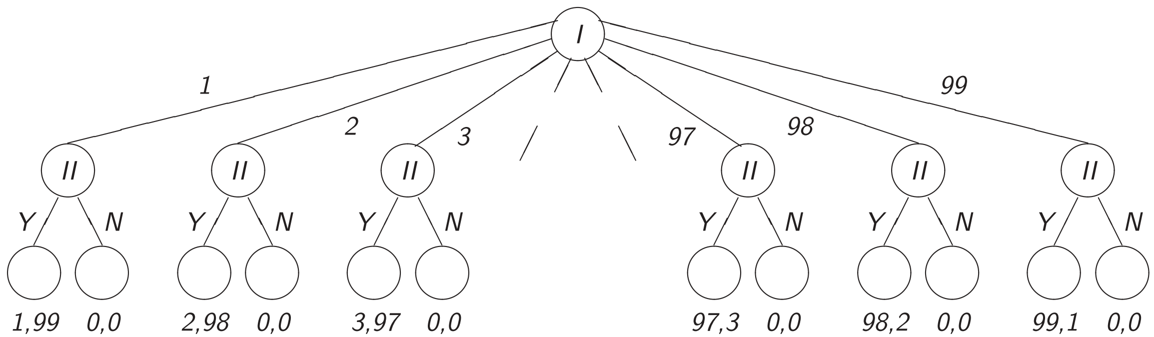
$\diamondsuit$

Esempio 3.10 (Ultimatum game)

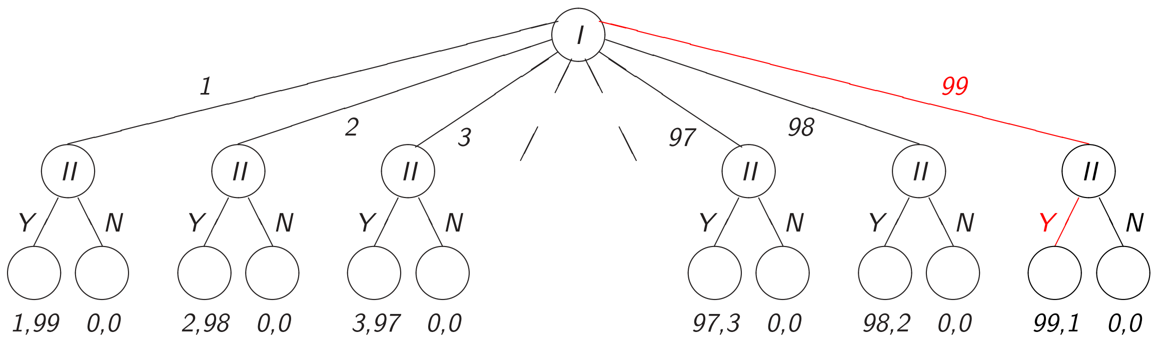
Due persone devono dividersi la cifra di 100 euro con le seguenti regole:

- *I propone una divisione (numeri interi, lasciando almeno 1 euro a ciascuno)*
- *se II accetta la divisione proposta, la divisione ha luogo*
- *se II non accetta la divisione proposta, non si assegna alcuna cifra*
- *entrambe le persone non sanno e non sapranno mai chi è l'altra*

Quale cifra conviene proporre a I?



La scelta ottimale del secondo giocatore è accettare sempre
In conseguenza la scelta ottimale del primo giocatore è proporre il massimo



Nelle sperimentazioni, questa soluzione non si realizza quasi mai, poichè l'utilità reale dei giocatori tiene conto di altri fattori ♢

3.8 Soluzione di un gioco (Solution concept)

Risolvere un gioco consiste nel fornire delle indicazioni ad uno o più giocatori, eventualmente tutti, su:

- strategie da adottare se il gioco è non cooperativo o cooperativo ad utilità non trasferibile
- suddivisione della vincita se il gioco è cooperativo ad utilità trasferibile

Le indicazioni non possono essere assolute in quanto bisogna tenere conto di fattori aleatori, o legati a preferenze e sensazioni del singolo giocatore. Un "concetto di soluzione" indica quella che secondo alcuni criteri assoluti è una scelta che può risultare accettabile a tutti i giocatori secondo i loro criteri soggettivi

Nell'esempio della battaglia dei sessi contano "egoismo", "altruismo" e situazioni precedenti

Esempio 3.11 (Divisione di una torta tra due giocatori)
È uno dei problemi più significativi: molto semplice, molto comune e molto complesso
La soluzione più usuale, uno taglia e l'altro sceglie, non è equa in quanto può favorire chi sceglie se chi taglia non è preciso, o chi taglia se è a conoscenza di qualche preferenza o "punto debole" di chi sceglie $\diamondsuit$