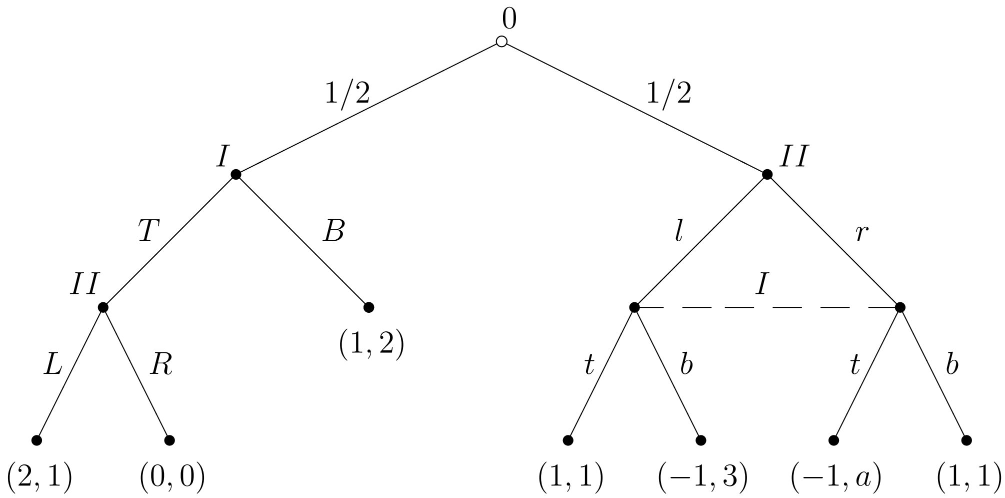
Teoria dei giochi applicata alle scienze sociali
Laurea Specialistica in Ingegneria Gestionale, Politecnico di MI, 2006/07
I prova intermedia, 19 dicembre 2006, foglio A

Tempo: 2 ore e 1/2; risolvere 3 dei 4 esercizi proposti; le risposte agli esercizi 3 e 4 non possono superare le due pagine; non è consentito l'uso di testi, appunti, etc...

GIUSTIFICARE LE RISPOSTE.

Non scrivere la soluzione di esercizi diversi su uno stesso foglio.

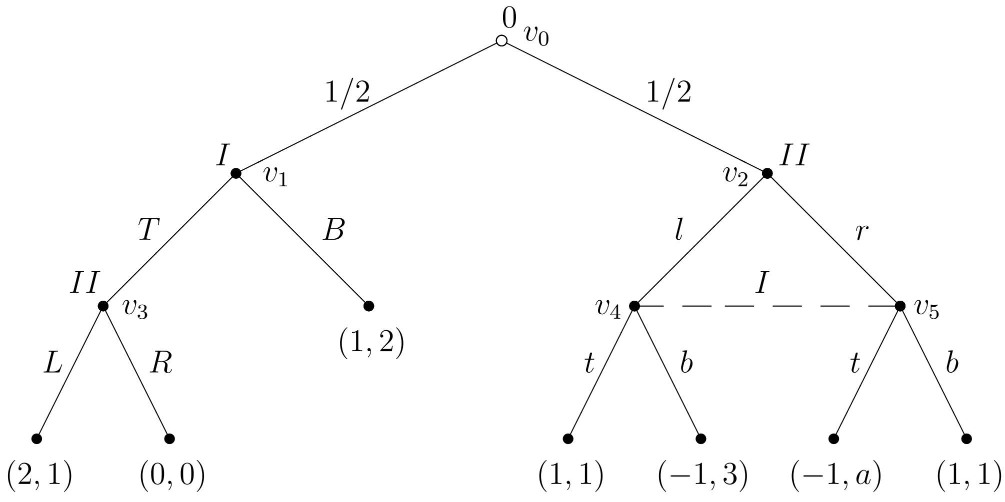
Esercizio 1 Si consideri il seguente gioco in forma estesa:



a) etichettare in modo conveniente i nodi non terminali e dire quali individuano un sottogioco e quali no;
b) descrivere la forma strategica del gioco;
c) trovare gli eventuali equilibri di Nash in strategie pure, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$; dire se e quali di questi sono SPE;
d) trovare un equilibrio di Nash per l'estensione mista del gioco quando $a = 3$

Soluzione
E' disponibile solo la soluzione del problema "gemello" del foglio B. Riporto qui la figura che mostra una possibile soluzione del punto a), semplicemente perché ormai era stata fatta e allora non ho voluto sprecare il lavoro. . .).

Una possibile etichettatura dei nodi non terminali è indicata nella figura seguente:



I nodi v_0, v_1, v_2, v_3 individuano sottogiochi del gioco dato. I nodi v_4 e v_5, no.

Rinvio alla soluzione dell'esercizio B anche per un commento sull'etichettatura.

Esercizio 2 Si consideri il problema di allocazione di costi con tre agenti, i cui costi per ogni coalizione sono riportati nella tabella seguente:

S	1	2	3	12	13	23	123
$c(S)$	8	9	6	11	10	13	16

a. Determinare le soluzioni ECA, ACA e CGA.

b. Determinare il valore di Shapley.

c. Quali delle soluzioni ottenute appartengono al nucleo del gioco?

Soluzione

ECA: 3.667, 6.667, 5.667
ACA: 4.111, 6.667, 5.222
CGA: 3.8, 3.143, 6.286
Il valore Shapley è: 4.667, 6.667 e 4.667.

Naturalmente, *ça va sans dire...*, alcuni di quelli scritti sopra sono dei valori arrotondati.

Il valore Shapley (indicato con Φ) non sta nel nucleo, essendo $c(\{1, 2\}) < \Phi_1 + \Phi_2$. Invece ECA, ACA e CGA soddisfano tutte le condizioni di razionalità (ed efficienza) richieste e pertanto stanno nel nucleo.

I calcoli non sono indicati, essendo di routine. Si rinvia al foglio elettronico che calcola tutti i risultati descritti sopra e che è disponibile sulla pagina web: `http://www.diptem.unige.it/patrone/decisori_razionali_interagenti/decisori_razionali_interagenti_web.htm`

Si tratta del file (Excel): `http://www.diptem.unige.it/patrone/decisori_razionali_interagenti/altro_materiale/calcolo_ACA_ECA_CGA_Shapley_value_e_verifica_se_stanno_nel_nucleo.xls`

Esercizio 3 Si espongano le caratteristiche del duopolio di Cournot e le si confrontino con quelle del duopolio di Stackelberg.

Esercizio 4 Forma estesa e forma strategica di un gioco.

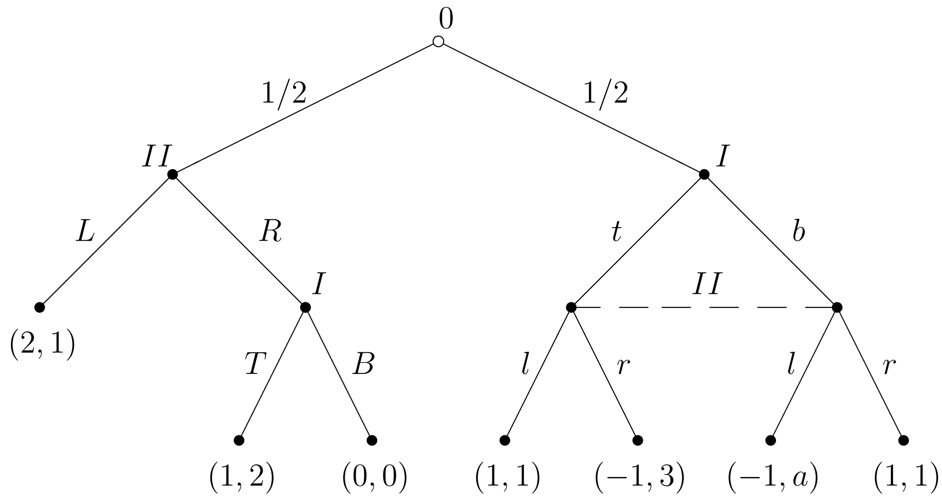
Teoria dei giochi applicata alle scienze sociali
Laurea Specialistica in Ingegneria Gestionale, Politecnico di MI, 2006/07
I prova intermedia, 19 dicembre 2006, foglio B

Tempo: 2 ore e 1/2; risolvere 3 dei 4 esercizi proposti; le risposte agli esercizi 3 e 4 non possono superare le due pagine; non è consentito l'uso di testi, appunti, etc...

GIUSTIFICARE LE RISPOSTE.

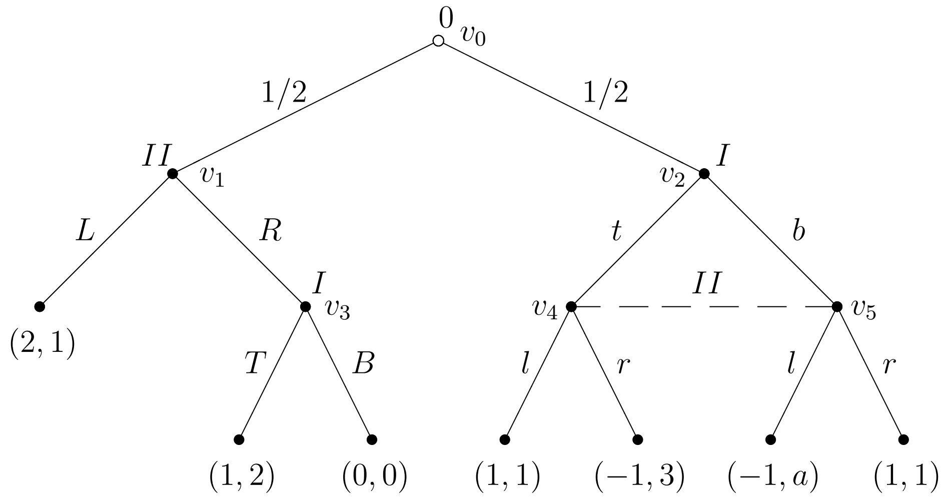
Non scrivere la soluzione di esercizi diversi su uno stesso foglio.

Esercizio 1 Si consideri il seguente gioco in forma estesa:



a) etichettare in modo conveniente i nodi non terminali e dire quali individuano un sottogioco e quali no;
b) descrivere la forma strategica del gioco;
c) trovare gli eventuali equilibri di Nash in strategie pure, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$; dire se e quali di questi sono SPE;
d) trovare un equilibrio di Nash per l'estensione mista del gioco quando $a = 3$

Soluzione
Una possibile etichettatura dei nodi non terminali è indicata nella figura seguente:



I nodi v_0, v_1, v_2, v_3 individuano sottogiochi del gioco dato. I nodi v_4 e v_5, no.

Alcuni commenti in merito alla etichettatura. E' stato osservato che i nodi erano già etichettati. Vero, ma si consideri che:
- è discutibile affermare che tutti i nodi siano etichettati: vedansi in particolare i nodi v_4 e v_5. Tuttavia, tenendo conto della definizione di gioco in forma estesa, è accettabile e ragionevole considerare che l'etichetta II si riferisca a entrambi i nodi v_4 e v_5. Ammettendo quindi che tutti i nodi siano etichettati, nulla vieta di *etichettare più volte un singolo nodo*
- nodi diversi non erano etichettati con etichette diverse (ad esempio, due nodi hanno l'etichetta I) e quindi quella disponibile non è una etichettatura adeguata per distinguere nodi diversi.

Per la forma strategica del gioco, può essere utile calcolare separatamente i payoff che si ottengono, in corrispondenza ai vari profili di strategia, nel caso in cui la sorte scelga il ramo di sinistra e in quello in cui viene scelto quello di destra. Poi si calcolano i payoff attesi tenendo conto delle probabilità con le quali vengono scelti i due rami.

Vediamo il ramo di sinistra:

$I \backslash II$	Ll		Lr		Rl		Rr	
Tt	2	1	2	1	1	2	1	2
Tb	2	1	2	1	1	2	1	2
Bt	2	1	2	1	0	0	0	0
Bb	2	1	2	1	0	0	0	0

E quello di destra:

$I \backslash II$	Ll		Lr		Rl		Rr	
Tt	1	1	-1	3	1	1	-1	3
Tb	-1	a	1	1	-1	a	1	1
Bt	1	1	-1	3	1	1	-1	3
Bb	-1	a	1	1	-1	a	1	1

Sommiamo ora le due matrici. Il risultato dovrebbe essere diviso per due, ma se i payoff derivano da funzioni di utilità di vNM, come è lecito attendersi visto che si parla di strategie miste, si tratta di una operazione del tutto irrilevante.

$I \backslash II$	Ll		Lr		Rl		Rr	
Tt	3	2	1	4	2	3	0	5
Tb	1	$1+a$	3	2	0	$2+a$	2	3
Bt	3	2	1	4	1	1	-1	3
Bb	1	$1+a$	3	2	-1	a	1	1

Se $a \leq 1$ abbiamo due equilibri di Nash: (Tb, Rr) e (Bb, Lr). Il primo è SPE, il secondo no.

Se $a > 1$, non ci sono equilibri di Nash (in strategie pure, s'intende).

E' facile verificare la correttezza di quanto sopra affermato. Per giungervi, è sufficiente evidenziare, come al solito, le best reply. Descriviamo qui (sottolineando convenientemente i payoff) la best reply nei casi $a < 1$, $a = 1$ e $a > 1$ (si noti che le best reply per II sono diverse nei casi $a < 1$ ed $a = 1$, ma questo non ha nessun effetto sugli equilibri di Nash).

Caso $a < 1$:

$I \backslash II$	Ll		Lr		Rl		Rr	
Tt	$\underline{3}$	2	1	4	$\underline{2}$	3	0	$\underline{5}$
Tb	1	$1+a$	$\underline{3}$	2	0	$2+a$	$\underline{2}$	$\underline{3}$
Bt	$\underline{3}$	2	1	$\underline{4}$	1	1	-1	3
Bb	1	$1+a$	$\underline{3}$	$\underline{2}$	-1	a	1	1

Caso $a = 1$:

$I \backslash II$	Ll		Lr		Rl		Rr	
Tt	$\underline{3}$	2	1	4	$\underline{2}$	3	0	$\underline{5}$
Tb	1	$1+a$	$\underline{3}$	2	0	$\underline{2+a}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$
Bt	$\underline{3}$	2	1	$\underline{4}$	1	1	-1	3
Bb	1	$\underline{1+a}$	$\underline{3}$	$\underline{2}$	-1	a	1	1

Caso $a > 1$:

$I \backslash II$	Ll		Lr		Rl		Rr	
Tt	$\underline{3}$	2	1	4	$\underline{2}$	3	0	$\underline{5}$
Tb	1	$1+a$	$\underline{3}$	2	0	$\underline{2+a}$	$\underline{2}$	3
Bt	$\underline{3}$	2	1	$\underline{4}$	1	1	-1	3
Bb	1	$\underline{1+a}$	$\underline{3}$	2	-1	a	1	1

Vediamo il caso $a = 3$.

$I \backslash II$	Ll		Lr		Rl		Rr	
Tt	$\underline{3}$	2	1	4	$\underline{2}$	3	0	$\underline{5}$
Tb	1	4	$\underline{3}$	2	0	$\underline{5}$	$\underline{2}$	3
Bt	$\underline{3}$	2	1	$\underline{4}$	1	1	-1	3
Bb	1	$\underline{4}$	$\underline{3}$	2	-1	3	1	1

Per la ricerca di un equilibrio in strategie miste, si può osservare che il sottogioco individuato da v_2 non è altro che il "pari o dispari" (rispetto ai payoff consueti è stato aggiunto 2, irrilevante, a II).

Basterà allora "comporre" in modo appropriato un equilibrio (in strategie pure) per il sottogioco "di sinistra", individuato dal nodo v_1 e il solito equilibrio in strategie miste per il "pari o dispari".

Il che ci dà un (plausibile) equilibrio: dovrebbe essere sufficiente considerare la strategia mista per I che assegna probabilità $1/2$ su Tt e Tb; analogamente per II: $1/2$ su Rl e Rr.

Per provare che questo è davvero un equilibrio di Nash, basta osservare che è, per costruzione, un equilibrio perfetto nei sottogiochi propri del gioco dato (infatti, la restrizione di questa coppia di strategie ad ognuno dei sottogiochi individua un equilibrio del sottogioco). Pertanto, sarà necessariamente anche un equilibrio di Nash. Senza dover verificare che lo sia anche per il gioco completo. Come mai? Perché la mossa iniziale è una mossa del caso e quindi, essendo le "componenti" della strategia di I miglior risposta alla strategia di II nei sottogiochi v_1 e v_2, la strategia complessiva di I sarà miglior risposta (nel gioco intero) alla strategia di II (se non lo fosse, ci sarebbe una deviazione profittevole, che darebbe luogo ad una deviazione profittevole in uno dei due sottogiochi).

Un altro modo per provare che abbiamo effettivamente trovato un equilibrio di Nash è naturalmente quello di provare che la definizione è soddisfatta. Ovvero, che la strategia mista $(1/2, 1/2, 0, 0)$ per I è miglior risposta alla strategie $(0, 0, 1/2, 1/2)$, e viceversa. Mi limito a provare la prima affermazione.

Data la strategia $(0, 0, 1/2, 1/2)$ di II, il payoff di I, se gioca $(p_1, p_2.p_3.p_4)$ (con le solite condizioni sui p_i) è minore o uguale di quello che ottiene se gioca $(1/2, 1/2, 0, 0)$:

$$1/2\,(2p_1 + 2p_2 + 0 + 0) = p_1 + p_2 \leq 1 = 1/2\,(2 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/2 + 0 + 0)$$

Esercizio 2 Si consideri il problema di allocazione di costi con tre agenti, i cui costi per ogni coalizione sono riportati nella tabella seguente:

S	1	2	3	12	13	23	123
$c(S)$	5	4	9	10	12	10	14

a. Determinare le soluzioni ECA, ACA e CGA.

b. Determinare il valore di Shapley.

c. Quali delle soluzioni ottenute appartengono al nucleo del gioco?

Soluzione

ECA: 5.333, 3.333, 5.333
ACA: 4.5, 3, 6.5
CGA: 4.571, 3.143, 6.286
Il valore Shapley è: 4.5, 3 e 6.5.

Naturalmente, *ça va sans dire...*, alcuni di quelli scritti sopra sono dei valori arrotondati.

Il valore Shapley (indicato con Φ) sta nel nucleo, essendo $c(S) \geq \sum_{i\in S} \Phi_i$ per ogni S, e $c(N) = \sum_{i\in N} \Phi_i$. Stesso dicasi (e conti analoghi) per ACA e CGA. Invece, ECA non soddisfa la condizione di razionalità individuale per il giocatore 1.

I calcoli non sono indicati, essendo di routine. Si rinvia al foglio elettronico che calcola tutti i risultati descritti sopra e che è disponibile sulla pagina web: `http://www.diptem.unige.it/patrone/decisori_razionali_interagenti/decisori_razionali_interagenti_web.htm`

Si tratta del file (Excel): `http://www.diptem.unige.it/patrone/decisori_razionali_interagenti/altro_materiale/calcolo_ACA_ECA_CGA_Shapley_value_e_verifica_se_stanno_nel_nucleo.xls`

Esercizio 3 Si espongano le caratteristiche del duopolio di Cournot e le si confrontino con quelle del duopolio di Stackelberg.

Esercizio 4 Forma estesa e forma strategica di un gioco.